Муниципальное общеобразовательное учреждение «Гимназия №1»

«Параметры. От простого к сложному. Практикум по решению задач»

Подготовила:

Агашкова Надежда Анатольевна

учитель математики

МОУ «Гимназия №1»

г.Железногорска Курской обл.

2017г.

Содержание.

Введение

«Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но, если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным, и, если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.»

(Д. Пойа. Как решать задачу.)

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики и требует большого количества времени на их изучение. При решении задач с параметрами требуется, кроме хорошего знания стандартных методов решений уравнений и неравенств, умение проводить довольно разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решение и не приобрести лишних. Это требует от школьника более развитого логического мышления и математической культуры, но, в свою очередь, эти задачи сами способствуют их развитию. Опыт выпускных экзаменов показывает, что учащиеся, владеющие методами их решения, обычно успешно справляются и с другими задачами. Но в то же время задачи с параметрами, включенные в содержание ЕГЭ по математике, очень часто оказываются не по силам учащимся. Это, вообще говоря, не удивительно, поскольку у большинства учащихся нет должной свободы в общении с параметрами.

Теоретическое изучение физических процессов, решение экономических задач часто приводит к различным уравнениям или неравенствам, содержащим параметры, и необходимой частью их решения является исследование характера процесса в зависимости от значений параметров. Таким образом, задачи с параметрами представляют собой небольшие исследовательские задачи.

К сожалению, в программах по математике для неспециализированных школ задачам с параметром практически не отводится места. Между тем, формировать умение учащихся видеть в выражении число, обозначенное буквой, необходимо на начальных ступенях обучения математике. В 5 классе при повторении свойств чисел можно рассмотреть

примеры:

*1) При каком натуральном значении **a** верно равенство:*

а) $a + 7 = 7 + 5$;

б) $3 \cdot a = 8 \cdot 3$?

*2)При каких натуральных значениях **b** деление 18 : **b** выполнено без остатка?*

*3) При каких натуральных значениях **b** при делении 16 : **b** в остатке получится 1?*

*4)При каких натуральных значениях **c** верно неравенство $12c < 100$?*

*5) При каких натуральных значениях **p** верно неравенство $12 < 5p < 50$?*

При изучении темы "Решение уравнений" учащиеся знакомятся с определением понятия "корень уравнения", вызывает интерес и способствует запоминанию определения корня уравнения следующее задание:

*Укажите значение **a**, при котором число 5 является корнем уравнения ax = 20.*

В заключение изучения темы "Действия с рациональными числами" на уроках математики в 6 классе можно рассматривать примеры решения уравнений вида $0x = 5$; $0x = 0$, предлагать задания развивающего характера в устной работе, а затем и в индивидуальной дифференцированной работе следующие уравнения: *1) 0x = a; 2) bx = 0.*

1) При каких значениях a уравнение 0x = a не имеет решений? При каких значениях a уравнение имеет бесконечное множество решений?

2) При каких значениях b уравнение bx = 0 имеет бесконечное множество решений? При каких значениях b уравнение bx = 0 не имеет решений?

На внеурочных занятиях по математике в 6 классе рассматривается решение уравнений с параметрами вида:

1) $ax = 6$ 2) $(a - 1)x = 8{,}3$ 3) $bx = -5$

Продолжить работу по решению простейших линейных уравнений с параметрами и приводимых к ним можно в 7 классе при изучении темы: "Решение линейных уравнений".

Задачи с параметрами можно и нужно использовать, уже начиная с линейных и квадратных уравнений и неравенств. Это могут быть задачи нахождения решений в общем виде, определения корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам, исследования количества корней в зависимости от значений параметра.

Важно, чтобы школьники уже на первых простых примерах усвоили: во-первых, необходимость аккуратного обращения с параметром – фиксированным, но неизвестным числом, поняли, что оно имеет двойственную природу (с одной стороны это некоторое число, с другой стороны степени свободы общения с ним ограничивается его неизвестностью); во-вторых, что запись ответа существенно отличается от записи ответов аналогичных уравнений и неравенств без параметра.

Методически было бы правильно каждый пройденный тип уравнений завершать задачами с использованием параметра. Во-первых, школьнику трудно привыкнуть к параметру за два-три занятия – нужно время; во-вторых использование подобных задач улучшает закрепление пройденного материала; в-третьих, оно способствует развитию его математической и логической культуры, а также развития интереса к математике, поскольку открывает перед ним новые методы и возможности для самостоятельного поиска.

Поэтому наша цель – научить учащихся методам решения задач с параметром, помочь преодолеть психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра.

Понятие уравнения с параметрами.

Что такое уравнение с параметром?

Пусть дано уравнение $f(x; a) = 0$. Если ставится задача отыскать все такие пары $(x; a)$, которые удовлетворяют данному уравнению, то оно рассматривается как уравнение с двумя равноправными переменными x и a. Но можно поставить и другую задачу, полагая переменные неравноправными. Дело в том, что если придать переменной a какое-либо фиксированное значение , то $f(x; a) = 0$ превращается в уравнение с одной переменной x, и решения этого уравнения, естественно, зависят от выбранного значения a. Например, уравнение $ax^2 - 3ax - 4 = 0$. При $a = 0$ получается уравнение $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x - 4 = 0$, которое не имеет решений. При $a = 1$ уравнение принимает вид $x^2 - 3x - 4 = 0$ и имеет корни -1 и 4. При $a = -1$ уравнение принимает вид $x^2 + 3x - 4 = 0$ и имеет корни -4 и 1. При $a = -\frac{16}{9}$ уравнение принимает вид $-\frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{3}x - 4 = 0$ и имеет один корень $x = 1{,}5$. Т.к. букву a можно заменить любым числом, то мы имеем дело с целым семейством уравнений.

Если уравнение $f(x; a) = 0$ нужно решить относительно переменной x, а под a понимается произвольное действительно число, то уравнение называют уравнением с параметром a. Основная трудность, связанная с решением уравнений с параметром, состоит в следующем: при одних значениях параметра уравнение не имеет решений, как мы видим из приведенного выше примера, при других – имеет бесконечно много решений, при третьих – оно решается по одним формулам, при четвертых – по другим. Как все это учесть?

Уравнение с параметром – это, по сути дела, краткая запись бесконечного семейства уравнений. Каждое из уравнений семейства получается из данного уравнения с параметром при конкретном значении параметра. Поэтому задачу решения уравнения с параметром можно сформулировать следующим образом: *решить уравнение с параметром* $f(x; a) = 0$ *– это значит решить семейство уравнений, получающихся из уравнения* $f(x; a) = 0$ *при любых действительных значениях параметра.*

Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно, но, тем не менее , каждое уравнение из бесконечного семейства должно быть решено. Сделать это, например, можно, если по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра – множество действительных чисел или множество значений, заданное в условии задачи, - на подмножества, а затем заданное уравнение решить на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества полезно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение уравнения. Такие значения параметра можно назвать контрольными или особыми. Искусство решения уравнения с параметрами как раз и состроит в том, чтобы уметь находить контрольные значения параметра.

Основные типы задач с параметрами.

Тип 1. Уравнения, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству. Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений). Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратные задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;
2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т.д.

Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы основными.

Наиболее массовый класс задач с параметром – задачи с одной неизвестной и одним параметром.

Основные методы решения задач с параметром.

Способ I (*аналитический*). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (*графический*). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости Oxy, или в координатной плоскости Oxa.

Способ III (*решение относительно параметра*). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Рассмотрим для знакомства некоторые уравнения с параметрами.

Задача № 1. *В уравнении* $(a-1)x = a-2$ *определите а так, чтобы число 3 было его корнем.*

Решение. Если число 3 является корнем уравнения, то оно обращает его в верное равенство. Подставим $x = 3$ в уравнение и решим его относительно a:

$(a - 1) \cdot 3 = a - 2$

$3a - a = 3 - 2$

$a = 0{,}5$

Итак, при $a = 0{,}5$ число 3 является корнем уравнения $(a - 1)x = a - 2$.

Ответ: 0,5.

Задача № 2. *Найти все значения параметра* a, *такие, что уравнение* $sin^2 x - 5\sin x + 2 = a$ *имеет корень* $x_0 = \frac{\pi}{6}$. *Найти все корни уравнения при найденном значении параметра а.*

Решение. Если уравнение имеет корень $x_0 = \frac{\pi}{6}$, то при подстановке в уравнение он обращает его в верное равенство. Подставим $x_0 = \frac{\pi}{6}$ в уравнение и решим его относительно a:

$sin^2 \frac{\pi}{6} - 5\sin\frac{\pi}{6} + 2 = a$

$\frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 = a$

$a = -\frac{1}{4}$

Решим теперь уравнение $sin^2 x - 5\sin x + 2 = a$ при $a = -\frac{1}{4}$.

$sin^2 x - 5\sin x + 2 = -\frac{1}{4}$

$sin^2 x - 5\sin x + 2{,}25 = 0$

Примем $\sin x = t$, где $|t| \le 1$.

Имеем: $t^2 - 5t + 2{,}25 = 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = \frac{9}{2}, \end{array}\right. \\ |t| \le 1; \end{cases}$$

$t = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$; $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Задача №3. *При каких значения m один из корней уравнения равен нулю:* $x^2 - 2x + 2m - 3 = 0$?

Решение. Если $x = 0$, то имеем:

$0^2 - 2 \cdot 0 + 2m - 3 = 0$

$2m = 3$

$m = 1{,}5$

Проверим, не равняется ли второй корень уравнения нулю.

$x^2 - 2x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $m = 1{,}5$.

Линейные уравнения и приводимые к ним уравнения с параметрами.

Линейным уравнением называется уравнение вида $ax = b$, где a, b - некоторые действительные числа, x – переменная.

В зависимости от коэффициента a, зависит и решение этого уравнения.

Если a=0, возникает два вопроса значениях b:

- Если a=0, b=0, то уравнение принимает вид $0x=b$, значит уравнение имеет бесконечно много решений, решением является любое действительно число.
- Если a=0, $b \neq 0$, то уравнение принимает вид $0x=b$, значит уравнение не имеет корней, т.к. нет такого числа, которое при умножении на нуль даст результат, отличный от нуля.
- При $a \neq 0$ мы можем обе части уравнения разделить на a, имеем единственный корень, равный $x = \frac{b}{a}$

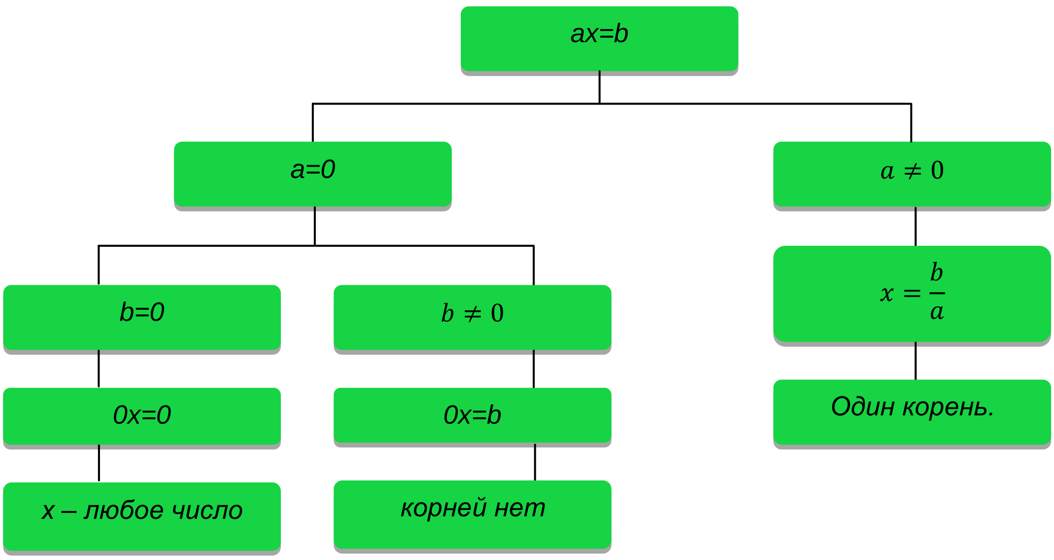
Ответ: при $a \neq 0$ единственное решение $x = \frac{b}{a}$;

при a=0, b=0 x – любое число;

при a=0, $b \neq 0$ нет решений;

при $a \neq 0$ единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

Наши рассуждения можно наглядно изобразить в виде схемы:



В процессе решения этого уравнения мы выделили значения параметра a = 0, при котором происходит качественное изменение уравнения, такое значение параметра мы будем называть «контрольным» или «особым».

Алгоритм решения линейных уравнений с параметром аналитическим способом:

1. Привести уравнение к виду $ax = b$
2. Найти контрольные значения параметра a.
3. Подставить контрольные значения в уравнение $ax = b$ и выяснить, сколько решений имеет уравнение.

4. Записать, при каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение.
5. Нанести все решения на ось параметров.
6. Записать правильно ответ.

Задача №1. *Для каждого значения параметра а решить уравнение* $a^2x - 1 = x + a$.

Решение. $a^2x - 1 = x + a$

1) Приведем уравнение к виду $ax = b$, для этого члены, содержащие *x,* перенесем в левую часть уравнения.

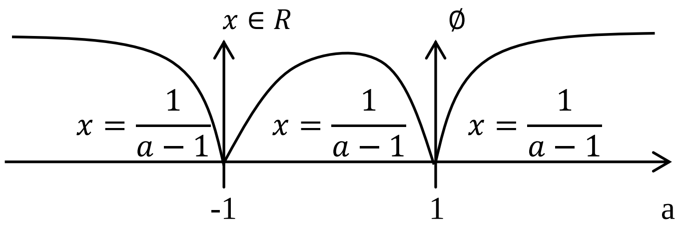
$$a^2x - x = a + 1$$
$$(a^2 - 1)x = a + 1$$
$$(a - 1)(a + 1)x = a + 1$$

2) Найдем контрольные значения параметра, при которых коэффициент при *x* обращается в нуль.

$$(a - 1)(a + 1) = 0$$
$$a = 1 \quad или \quad a = -1$$

3) Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 2$, т.е. при $a = 1$ уравнение не имеет решений.
4) Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0, x \in R$
5) Если $a \neq 1; a \neq -1$, то уравнение имеет единственное решение:
$x = \dfrac{a+1}{(a+1)(a-1)}$; $\quad x = \dfrac{1}{a-1}$

3) Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 2$, т.е. при $a = 1$ уравнение не имеет решений.
4) Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0, x \in R$
5) Если $a \neq 1; a \neq -1$, то уравнение имеет единственное решение:
$x = \frac{a+1}{(a+1)(a-1)}$; $\quad x = \frac{1}{a-1}$



Ответ: при $a = -1$, x – любое;

при $a = 1$, решений нет;

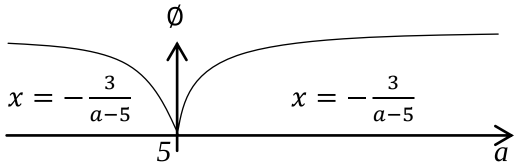
при $a \neq 1; a \neq -1$, один корень $x = \frac{1}{a-1}$.

Задача №2. *Укажите все значения параметра* a, *при котором уравнение* $ax - 2x = 3(x - 1)$ *имеет корень.*

Решение.

$$ax - 2x = 3(x-1)$$

1) Приведем уравнение к виду $ax = b$, для этого раскроем скобки и члены, содержащие x, перенесем в левую часть уравнения.
$ax - 2x = 3x - 3$
$ax - 2x - 3x = -3$
$ax - 5x = -3$
$(a-5)x = -3$
2) Найдем контрольные значения параметра a.
$a - 5 = 0$
$a = 5$
3) Если $a = 5$, то уравнение принимает вид 0х = -3, т.е. при $a = 5$ уравнение не имеет решений.
4) Если $a \neq 5$, то уравнение имеет единственное решение
$x = -\dfrac{3}{a-5}$



Ответ: при $a \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Решение уравнений с параметрами, приводимых к линейным. В 8-ом классе, после изучения темы «Допустимые и недопустимые значения переменных», можем продолжить рассматривать линейных уравнений с параметрами.

Задача №3. *При всех значениях a решите уравнение*

$$\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$$

Решение. Обращаем внимание на то, что параметр находится в знаменателе. А знаменатель дроби не должен быть равен нулю (т.е. параметр имеет область допустимых значений). Контрольными значения параметра, при котором знаменатель дроби равен 0.

О.Д. З $x \in R$, $a \neq 0$

1) При <u>a=0</u> уравнение <u>не имеет корней</u>..

2)При $a \neq 0$

$$\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$$

Умножим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим линейное уравнение с параметром.

2(a+1)x=3a(x+1)+7

2(a+1)x-3a(x+1)=7

2ax+2x-3ax-3a=7

2x-ax=7+3a

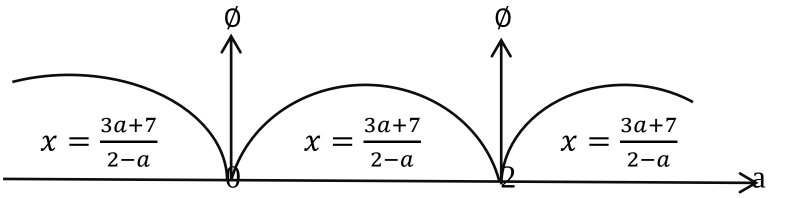
(2-a)x=7+3a

Получим уравнение вида *ax=b*

<u>контрольные значения параметра</u>: 2-*a*=0

<u>*a*=2</u>

Если a=2,то 0·x=13 уравнение не имеет корней.
Если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{7+3a}{2-a}$



Ответ: при $a \neq 0$ и $a \neq 2$, единственное решение x= $\frac{3a+7}{2-a}$

при $a = 0$ *или* $a = 2$, нет корней

Линейные уравнения с параметром при наличии дополнительных условий к корням уравнения.

Задача №4. *При каких значениях параметра а уравнение* $(a^2-1) \cdot a = a^2 - 2a - 3$ *имеет единственное решение, принадлежащее лучу* $[-1;+\infty)$.

Решение. $(a^2-1) \cdot x = a^2 - 2a - 3$
1) Найдем контрольные значения параметра, при которых коэффициент при *x* обращается в нуль:

$$a^2 - 1 = 0$$
$$a^2 = 1$$
$$a = \pm 1$$

2) Если *a*=1, то уравнение принимает вид 0x= -4, т.е. при *a*=1 уравнение не имеет решений, и условие задачи не выполняется.

3) Если *a*=-1, то уравнение принимает вид 0x=0, $x \in R$. Условие задачи не выполняется.
4) Если $a \neq 1; a \neq -1$, то уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{a^2-2a-3}{a^2-1}$$

$$x = \frac{(a+1)(a-3)}{(a+1)(a-1)}$$

$$x = \frac{a-3}{a-1}$$

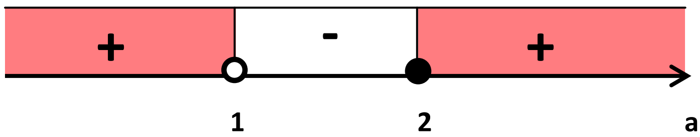
Тогда, $\frac{a-3}{a-1} \geq -1$

$$\frac{a-3^{\backslash 1}}{a-1} + 1^{\backslash a-1} \geq 0$$

$$\frac{a-3+a-1}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{2a-4}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{a-2}{a-1} \geq 0$$



$$a \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty]$$

Исключим a = -1, при котором уравнение не имеет единственного решения.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup [2; +\infty]$

Дробно - рациональные уравнения, сводящиеся к линейным.

Задача №1. *Решите уравнение* $\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3}$.

Решение.

1) О.Д.З.: $(m-1)(x+3) \neq 0$

Отсюда $m \neq 1; x \neq -3$

2) При m=1 уравнение не имеет корней.

3) При $m \neq 1$:

Преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3} \quad | \cdot (m-1)(x+3) \neq 0$$

$$3mx - 5 + (3m-11)(x+3) = (2x+7)(m-1)$$

$$3mx - 5 + 3mx + 9m - 11x - 33 = 2xm - 2x + 7m - 7$$

$$4mx - 9x = 31 - 2m$$

Получим уравнение вида ax=b

Контрольные значения параметра: $4m - 9 = 0$

$$m = \frac{9}{4}$$

Если $m = \frac{9}{4}$, то $0 \cdot x = 31 - 4{,}5$

$0 \cdot x = 26{,}5$ уравнение не имеет решений.

Если $m \neq \frac{9}{4}$, то $x = \frac{31-2m}{4m-9}$ – единственное решение.

4) Учтем О.Д.З.:

Найдем значение параметра m, при котором этот корень принимает значение -3.

Имеем: $\frac{31-2m}{4m-9} = -3$

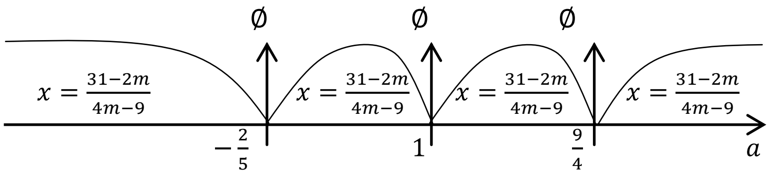
$-3(4m-9) = 31-2m$

$-12m + 27 = 31 - 2m$

$-10m = 4$

$m = -\frac{2}{5}$

При $m = -\frac{2}{5}$ уравнение не имеет решений



Ответ: при $a = -\frac{2}{5}; a = 1; a = \frac{9}{4}$ решений нет;

при $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}; 1\right) \cup \left(1; \frac{9}{4}\right)$ $x = \frac{31-2m}{4m-9}$.

Задача №2. При каких значениях параметра a не имеет решений уравнение

$\frac{x-a}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$?

Решение.

1) О.Д.З.: $a \in R, x \neq 2 \text{ и } x \neq -2$

2) На О.Д.З. преобразуем исходное уравнение:

$\frac{x-a}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x^2-4} \qquad | \cdot (x-2)(x+2) \neq 0$

$(x-a)(x+2) - x(x-2) = 1$

$x^2 + 2x - ax - 2a - x^2 + 2x = 1$

$2x - ax + 2x = 2a + 1$

$4x - ax = 2a + 1$

$(4-a) \cdot x = 2a + 1$

Получим уравнение вида $ax=b$

Контрольные значения параметра: $4 - a = 0$

$a = 4$

Если $a = 4$, то уравнение $0 \cdot x = 9$ не имеет решений.

Если $a \neq 4$, то $x = \frac{2a+1}{4-a}$ – единственное решение.

3) Вернемся к области допустимых значений.

Найдем значения параметра а, при которых этот корень принимает значения 2 и -2.

1) $\frac{2a+1}{4-a} = 2$

$2a + 1 = 2(4 - a)$

$2a + 1 = 8 - 2a$

$4a = 7$

$a = \frac{7}{4}$

$a = 1\frac{3}{4}$

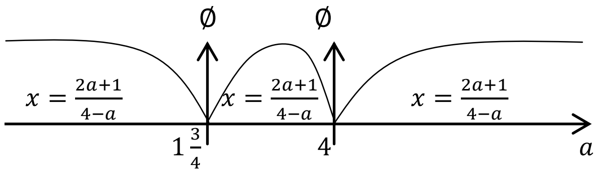
2) $\frac{2a+1}{4-a} = -2$

$2a + 1 = -8 + 2a$

$0 \cdot a = -9$

решений нет

При $a = 1\frac{3}{4}$ уравнение не имеет решений.



Ответ: при а=1,75 и а=4 уравнение не имеет решений.

Квадратные уравнения с коэффициентами, зависящими от параметров.

Справочный материал.

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$ *где коэффициенты* a, b, c - любые действительные числа, называется ***квадратным.***

Определение. Квадратное уравнение называется ***приведенным***, если $a = 1$; квадратное уравнение называют ***неприведенным***, если $a \neq 1$.

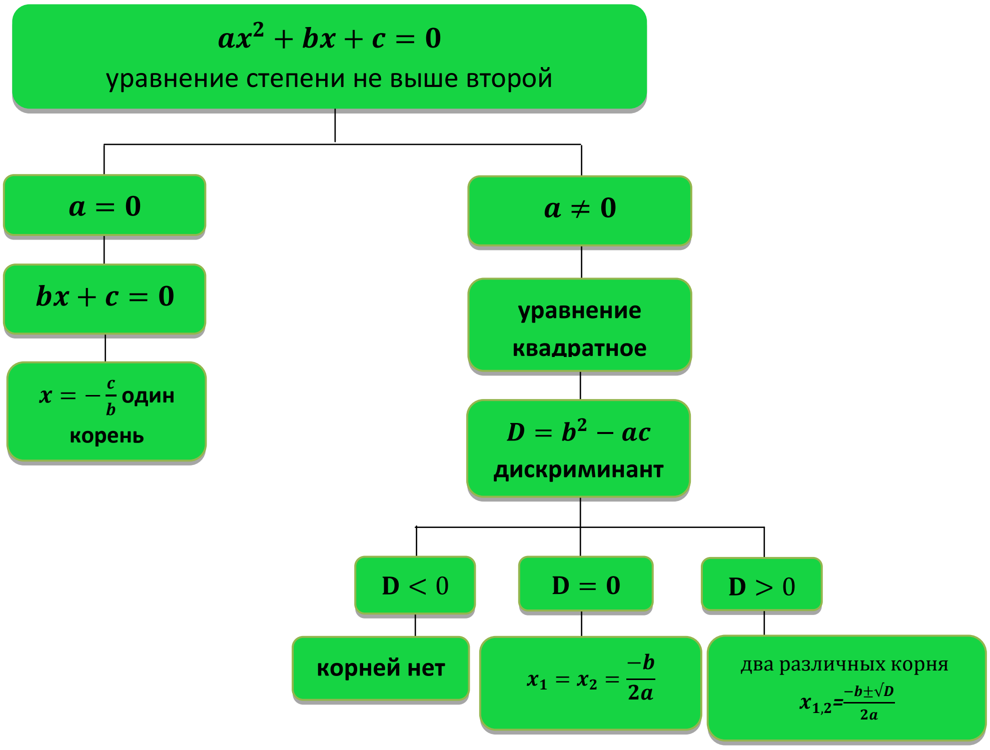
Определение. ***Полное квадратное уравнение*** –это квадратное уравнение , в котором a, b, c отличны от нуля.

Определение. ***Неполное квадратное уравнение*** - это уравнение, в котором один или оба коэффициента b, c равны нулю.

Определение. Корнем квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль.

Выражение $\boldsymbol{b^2-4ac}$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Квадратное уравнение в зависимости от знака дискриминанта D может иметь один, два или не иметь корней.
Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.
Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет единственный действительный корень $x=\frac{-b}{2a}$ (или говорят, что это уравнение имеет два кратных корня $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$).
Если $D>0$, *то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня* $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$



При решении квадратного уравнения с параметром *контрольными* будут те значения параметра, при которых коэффициент при x^2 обращается в 0. Дело в том, что если этот коэффициент равен нулю, то уравнение превращается в линейное и решается по соответствующему алгоритму; если же этот коэффициент отличен от нуля, то имеем квадратное уравнение, которое решается по иному алгоритму (меняется процедура решения, в этом и состоит качественное изменение уравнения). Дальнейшее решение зависит от D.

Рассмотрим несколько квадратных уравнений с параметром.

Задача №1. При каких значениях параметра a имеет два корня уравнение $x^2+2ax+a^2-3a+1=0$?

Решение.

Данное уравнение является квадратным. Оно имеет два корня, если $D>0$. Имеем:

$$x^2+2ax+a^2-3a+1=0$$

a=1 b=2a $c=a^2-3a+1$

$D_1 = a^2 - (a^2 - 3a + 1) = a^2 - a^2 + 3a - 1 = 3a - 1;$

$D_1 > 0$

3a-1 >0

$a > \frac{1}{3}$

Ответ: при $a > \frac{1}{3}$.

Задача №2. При каком значении параметра *a* имеет единственный корень уравнение $2x^2 - ax + 18 = 0$?

Решение. Данное уравнение является квадратным.
Оно имеет единственный корень, если D=0
Имеем:

$2x^2 - ax + 18 = 0$

a = 2   *b* = -*a*   *c* = 18

$D = a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = a^2 - 144$

$a^2 - 144 = 0$

a = -12   или   *a* = 12

Ответ: при *a* = -12; *a* = 12

Задача №3. При каких значениях параметра *m* не имеет корней уравнение $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$?

Решение.

Данное уравнение квадратное. Оно не имеет корней, если $D < 0$.

$x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$

a=*1*   *b*=*m* $c = m^2 + 1$

$D = m^2 - 4(m^2 + 1) = m^2 - 4m^2 - 4 = -3m^2 - 4 = -(3m^2 + 4)$

Т.к. $(3m^2 + 4) > 0$ при любых значениях m, то $-(3m^2 + 4) < 0$ при любом m.
Значит, уравнение не имеет корней при любых значениях m.
Ответ: при *m* – любое.

Задача №4. При каких значениях параметра а не имеет корней уравнение $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$?
Решение.

Данное уравнение квадратное. Оно не имеет корней, если D < 0.

Запишем уравнение в следующем виде:

$x^2 - 2(a + 2)x + 8a = 0$

$D_1 = (a + 2)^2 - 8a = a^2 + 4a + 4 - 8a = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$

Выражение $(a - 2)^2$ не может быть отрицательным. Значит, таких значений параметра *a,* при которых D < 0, нет.

Ответ: $a \in \emptyset$

Задача №5. При всех значениях a решите уравнение $(a-2)x^2+2ax+a+3=0$.

Решение.
Обратим внимание на распространенную ошибку: считать такое уравнение квадратным. Т.к. коэффициент перед x^2 может быть равен 0!
На самом деле это уравнение степени не выше второй.
I. Если $a-2=0, a=2$, то получаем линейное уравнение

$4x+5=0$

$x=-1\frac{1}{4}$, которое имеет единственный корень.

II. Если $a-2\neq 0$, $a\neq 2$, то уравнение является квадратным. Количества корней уравнения зависит от дискриминанта.

$$(a-2)x^2+2ax+a+3=0$$

$$a=a-2 \quad b=2a \quad c=a+3$$

$$D_1=a^2-(a-2)(a+3)=a^2-(a^2+a-6)=a^2-a^2-a+6=6-a$$

1) Если $D_1>0$, *т.е.* $6-a>0$

a<6, два корня

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{6-a}}{a-2}$$

2) Если $D_1=0$, *т.е. 6-a=0*

a=6, один корень

$$4x^2+12x+9=0$$

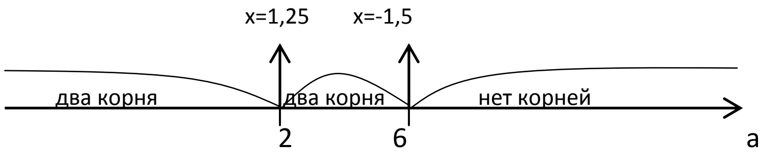
$$(2x+3)^2=0$$

$$2x+3=0$$

$$\underline{x=-1{,}5}$$

3) Если $D_1<0$, т.е. *6-a<0*

a>6, корней нет



Ответ: при a < 2, 2 < a < 6, $x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{6-a}}{a-2}$;

при a = 2, $x=-1\frac{1}{4}$;

при a = 6, x = -1,5;

при a > 6, корней нет.

Задача №6. При каком значении параметра b имеет единственный корень уравнение $(b+6)x^2-(b-2)x+1=0$?

Решение.

$$(b+6)x^2-(b-2)x+1=0$$

Уравнение степени не выше второй

I. Если $b + 6 = 0, т.е. b = -6$ получаем линейное уравнение

$8x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{8}$,

имеющее один корень.

II. Если $b + 6 \neq 0, т.е. b \neq -6$, то уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если $D = 0$

$$D = (b-2)^2 - 4(b+6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20$$

Имеем:

$$b^2 - 8b - 20 = 0$$

$$b = -2; \;\; b = 10$$

Ответ: при $b = -6;\;\; b = -2; b = 10$.

Задача №7. При каких a уравнение $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

Решение.

$$(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$$

I. Если a - 2=0, т.е. a = 2, то 0x = -3, корней нет

II. Если $a - 2 \neq 0, т.е. a \neq 2$, уравнение является квадратным

Перепишем наше уравнение в следующем виде

$$(a-2)x^2 - 2(a-2)x + 3 = 0$$

Оно имеет единственный корень, если $D_1 = 0$

$$D_1 = (a-2)^2 - 3(a-2) = a^2 - 4a + a - 3a + 6 = a^2 - 7a + 10$$

Имеем:

$$a^2 - 7a + 10 = 0$$

$$a = 2; a = 5$$

Но при a=2 уравнение не имеет корней, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: при a = 5

Задача №8. При каких a уравнение $a(a+3)x^2 + 2(a+6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

Решение.

$$a(a+3)x^2 + 2(a+6)x - 3a - 9 = 0$$

Уравнение степени не выше второй, т.е. нельзя считать квадратным

I. Если a(a+3)=0, т.е. a = 0 или a = -3

а) при a=0, 6x – 9 = 0

x =1,5 единственный корень (не удовлетворяет условию задачи)

б) при a = -3, $0a$ = 0, x – любое число. (это значение параметра удовлетворяет условию задачи)

II. Если $a(a+3) \neq 0$, т.е. $a \neq 0, a \neq -3,$ то уравнение является квадратным. Перепишем наше уравнение в следующем виде:

$$a(a+3)x^2 + 2(a+3)x - 3(a+3) = 0$$

И т.к. $a + 3 \neq 0$, то обе части уравнения разделим на $a + 3 \neq 0$

Получим:

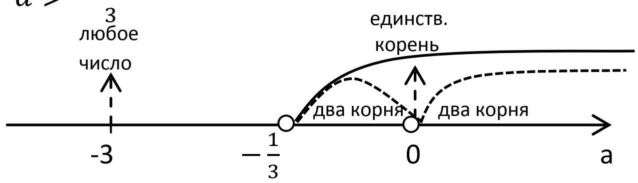
$$ax^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D_1 = 1 + 3a$$

Уравнение будет иметь два корня, если $D_1 > 0$

Т.е. $1 + 3a > 0$

$$a > -\frac{1}{3}$$



При $a = 0$, уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию задачи. Значит, из промежутка $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ нужно исключить точку $a = 0$ и в ответ не забыть включить $a = -3$.

Ответ: при $a \in \{-3\} \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$

Хотелось бы отметить, что если дискриминант оказывается полным квадратом, то для корней квадратного трехчлена получаются выражения, не содержащие радикалов, и это обстоятельство часто упрощает решение задачи. Однако такая ситуация попадается не всегда. В некоторых задачах, использование явных выражений для корней приводит к техническим трудностям и решение находится другими методами.

Задачи на применение теорем Виета.

Многие задачи, связанные с квадратным трехчленом, и методы их решения основаны на применении прямой и обратной теорем Виета.

Теорема Виета. *Сумма корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + x = 0$ равна отношению второго коэффициента к первому, взятому с противоположным знаком, а произведение равно отношению свободного члена к первому коэффициенту:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Для приведенного квадратного уравнения.

Если x_1 *и* x_2*– корни приведенного квадратного уравнения* $x^2 + px + q = 0$*, то*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

т.е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Обратная теорема Виета. *Если сумма двух действительных чисел* x_1 *и* x_2 *равна* $-\frac{b}{a}$*, а произведение равно* $\frac{c}{a}$*, то эти числа являются корнями квадратного уравнения* $ax^2 + bx + x = 0$.

Для приведенного квадратного уравнения.

Если существуют действительные числа x_1 *и* x_2 *такие, что* $x_1 + x_2 = -p$ *и* $x_1 x_2 = q$*, то эти числа* x_1 *и* x_2 *являются корнями квадратного уравнения* $x^2 + px + q = 0$.

К типу задач, основанных на применение теорем Виета, относятся задачи, в которых требуется определить такие значения параметра, при которых сумма или произведение корней квадратного трехчлена равна какому-либо числу; сумма квадратов или кубов корней квадратного трехчлена принимает наибольшее или наименьшее значение и т.д. Применение теорем Виета значительно упрощает решение.

Исследование знаков корней.

Теорема1

Чтобы корни квадратного трехчлена были действительными и имели ***одинаковые знаки***, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$D = b^2 - 4ac \geq 0$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$,

при этом ***оба корня будут положительными, если дополнительно наложить условие:***

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$,

и оба корня будут отрицательны, если

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$.

Теорема 2

Чтобы корни квадратного трехчлена были действительными и ***имели различные знаки***, необходимо и достаточно выполнение соотношений:

$D = b^2 - 4ac > 0$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$,

при этом ***положительный корень*** имеет большую абсолютную величину, если

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0,$

если же $\quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$

то ***отрицательный корень*** имеет большую абсолютную величину.

Задача №1. При каких значениях параметра *a* произведение корней уравнения $x^2 + (a+2)x + a^2 - 4a = 0$ равно нулю?

Решение. $x^2 + (a+2)x + a^2 - 4a = 0$

Данное уравнения квадратное.

Если корни квадратного уравнения существуют, то по теореме Виета $x_1 x_2 = a^2 - 4a$

Произведение корней равно 5, если

$$a^2 - 4a = 5$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0$$

$$a = -1 \quad a = 5$$

Подставим найденные значения параметра *a* в исходное уравнение и выясним, при каких *a* квадратное уравнение имеет корни.

При $a = -1$ получим, $\quad x^2 + x + 1 + 4 = 0$

$x^2 + x + 5 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -19,\ D < 0$

уравнение не имеет корней.

При $a = 5$ получим, $\quad x^2 + 7x + 25 - 20 = 0$

$x^2 + 7x + 5 = 0$

$D = 49 - 4 \cdot 5 = 29;\ D > 0$

уравнение имеет два корня.

Ответ: при $a = 5$.

Задача №2. При каких значениях параметра *a* сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a-1)x - 2a = 0$ равна 9?

Решение.

$$x^2 + (a-1)x - 2a = 0$$

Данное уравнение является квадратным.

Найдем дискриминант:

$$D = (a-1)^2 + 4 \cdot 2a = a^2 - 2a + 1 + 8a = a^2 + 6a + 1$$

Теорема Виета работает лишь для тех квадратных уравнений, у которых есть корни.

Существование корней определяется условием $D \geq 0$, т.е.

$$a^2 + 6a + 1 \geq 0$$

Пусть x_1 *и* x_2 – корни данного уравнения.

По условию $x_1^2 + x_2^2 = 9$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9$$

Применяя теорему Виета, имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - a, \\ x_1x_2 = -2a; \end{cases}$$

Получаем уравнение:

$$(1 - a)^2 + 2 \cdot 2a = 9$$

$$1 - 2a + a^2 + 4a - 9 = 0$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$a_1 = -4 \quad a_2 = 2$$

Найденные значения $a = -4$ *и* $a = 2$ должны удовлетворять неравенству

$a^2 + 6a + 1 \geq 0$. Проверим.

Если $a = -4$, то $(-4)^2 - 24 + 1 \geq 0$

$17 - 24 \geq 0$ (неверно)

Значит, при $a = -4$ уравнение не имеет корней.

Если $a = 2$, то $4 + 12 + 1 \geq 0$ (верно)

Значит, при $a = 2$ уравнение имеет корни.

Ответ: при $a = 2$.

Задача №3. Найдите все значения *a,* при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$ в два раза больше другого.

Решение.

$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$

Уравнение должно иметь два различных корня, поэтому дискриминант положителен:

$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + 2) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 8 = 4a - 7$

$4a - 7 > 0$

$a > \frac{7}{4}$

$a > 1{,}75$

Пусть корни нашего уравнения *t* и *2t*. По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} t + 2t = 2a + 1, \\ t \cdot 2t = a^2 + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t = 2a + 1, \\ 2t^2 = a^2 + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{2a + 1}{3}, \\ 2 \cdot \frac{(2a + 1)^2}{9} = a^2 + 2; \end{cases}$$

$$2(2a + 1)^2 = 9a^2 + 18$$

$$2(4a^2 + 4a + 1) = 9a^2 + 18$$
$$8a^2 + 8a + 2 = 9a^2 + 18$$
$$9a^2 + 18 - 8a^2 - 8a - 2 = 0$$
$$a^2 - 8a + 16 = 0$$
$$(a - 4)^2 = 0$$
$$a - 4 = 0$$
$$a = 4$$

Значение $a = 4$ удовлетворяет неравенству $a > 1{,}75$, значит подходит.

Ответ: $a = 4$.

Задача №4. Найдите все действительные значения параметра a, при которых корни уравнения $(a - 3)x^2 - 2ax + 6a = 0$действительны и положительны.

Решение.

$$(a - 3)x^2 - 2ax + 6a = 0$$

Данное уравнение степени не выше второй.

1) Если $a - 3 = 0, a = 3$, то получаем уравнение

$$-6x + 18 = 0$$
$$-6x = -18$$
$$x = 3$$

3 – положительный корень, значит, значение $a = 3$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если $a - 3 \neq 0, a \neq 3$,то уравнение является квадратным. Найдем дискриминант:

$$D_1 = a^2 - 6a(a - 3) = a^2 - 6a^2 + 18a = 18a - 5a^2$$

Существование корней уравнения определяется условием $D \geq 0$, т.е.

$$18a - 5a^2 \geq 0$$
$$5a^2 - 18a \leq 0$$
$$a(5a - 18) \leq 0$$
$$0 \leq a \leq \frac{18}{5}$$
$$0 \leq a \leq 3{,}6$$

3) Пусть x_1 *и* x_2 – корни данного уравнения.

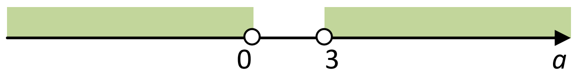
Чтобы корни были действительными и положительными, необходимым и достаточным условием служит система неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

По теореме Виета:

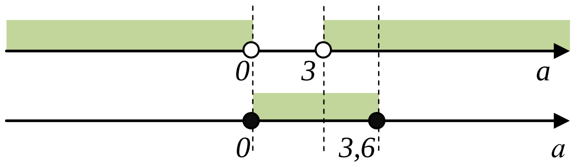
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-3}, \\ x_1 x_2 = \frac{6a}{a-3}; \end{cases}$$

Получаем, $\begin{cases} \frac{2a}{a-3} > 0, \\ \frac{6a}{a-3} > 0; \end{cases} \quad \frac{a}{a-3} > 0$



$a < 0$ или $a > 3$

Учитывая, что $0 \leq a \leq 3{,}6$, получим



А т.к. при $a = 3$ уравнение имеет положительный корень, то $a \in [3; 3{,}6]$

Ответ: $a \in [3; 3{,}6]$.

Задача №5. Определите значения параметра a, при которых сумма S квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей. Чему равна эта сумма?

Решение.

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D_1 = a^2 - (2a^2 + 4a + 3) = a^2 - 2a^2 - 4a - 3 = -a^2 - 4a - 3$$

Чтобы квадратное уравнение имело корни, дискриминант должен быть неотрицательным.

$$-a^2 - 4a - 3 \geq 0$$

$$a^2 + 4a + 3 \leq 0$$

$$-3 \leq a \leq -1$$

Из теоремы Виета следует:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a, \\ x_1 x_2 = 2a^2 + 4a + 3. \end{cases}$$

$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-2a)^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = 4a^2 - 4a^2 - 8a - 6 =$
$= -8a - 6$

Сумма будет наибольшей при $a = -3$

$S = -8 \cdot (-3) - 6 = 24 - 6 = 18$

Ответ: при $a = -3; S = 18$.

Задача №5. При каких значениях параметра *a* уравнение $x^4 - (4a-5)x^2 + 3a^2 - 5a = 0$ имеет два корня?

Решение.

$$x^4 - (4a-5)x^2 + 3a^2 - 5a = 0$$

Пусть $x^2 = t$, *тогда*

$$t^2 - (4a-5)t + 3a^2 - 5a = 0$$

Исходное уравнение будет иметь два корня в следующих случаях:

1) Если уравнение $t^2 - (4a-5)t + 3a^2 - 5a = 0$ имеет единственный корень и он положительный.

Найдем дискриминант:

$$D = (4a-5)^2 - 4(3a^2 - 5a) = 16a^2 - 40a + 25 - 12a^2 + 20a = 4a^2 - 20a + 25 = \\ = (2a-5)^2$$

Чтобы уравнение имело единственный корень, дискриминант должен быть равен нулю.

$$(2a-5)^2 = 0$$

$$2a - 5 = 0$$

$$a = 2{,}5$$

Тогда решением уравнения будет $t = \frac{-b}{2a} = \frac{4a-5}{2} = \frac{4\cdot 2{,}5-5}{2} = \frac{10-5}{2} = 2{,}5$. Т.к. корень положительный, то $a = 2{,}5$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если уравнение $t^2 - (4a-5)t + 3a^2 - 5a = 0$ имеет два корня разных знаков. Уравнение будет иметь два корня разных знаков, если произведение корней $t_1 \cdot t_2$ будет отрицательным. По теореме Виета произведение корней $t_1 \cdot t_2 = 3a^2 - 5a$.

Следовательно, $3a^2 - 5a < 0$

$$a(3a-5) < 0$$

Ответ: при $a \in \left(0; 1\frac{2}{3}\right) \cup \{2{,}5\}$.

Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра.

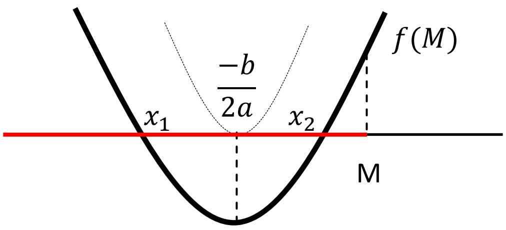
При решении многих задач требуется знание следующих теорем и следствий о расположении корней квадратного трехчлена на координатной прямой.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$ имеет действительные корни x_1, x_2, которые могут быть кратными, а М, А – какие-нибудь действительные числа, причем А > М. Тогда:

Теорема 1.

Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число М (т.е. лежали на координатной прямой левее, чем точка М), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$a > 0$

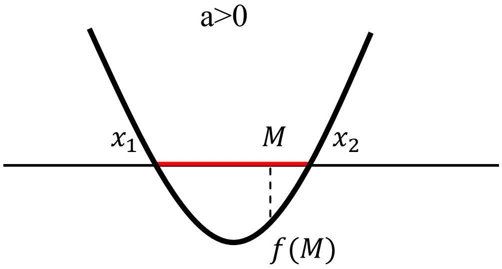


$$\begin{cases} D \geq 0; \\ x_0 = \frac{-b}{2a} < \text{М}; \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

Теорема 2.

Чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число М, а другой больше, чем М (т.е. точка М лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a>0

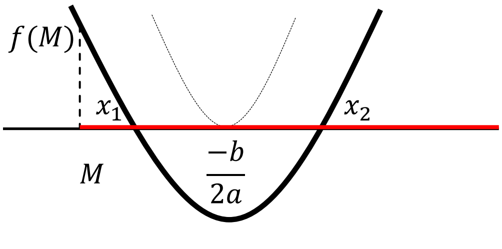


$$f(M) < 0$$

Теорема 3.

Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число М (т.е. лежали на координатной прямой правее, чем число М), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a>0

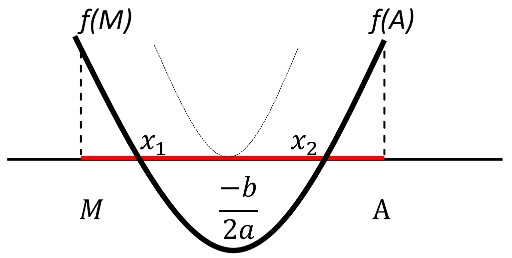


$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{-b}{2a} > M \\ f(M) > 0 \end{cases}$$

Приведем наиболее часто встречающиеся следствия из этих утверждений.

Следствие 1.

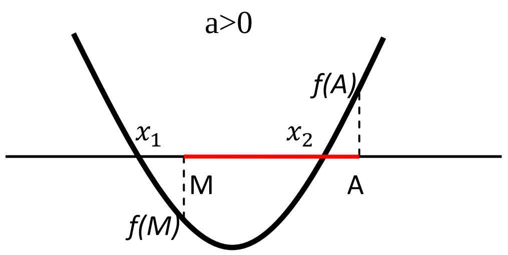
Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число М, но меньше, чем число А (М < А), т.е. лежали на интервале между М и А, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(M) > 0 \\ f(A) > 0 \\ M < \dfrac{-b}{2a} < A \end{cases}$$

Следствие 2.

Чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между М и А (М<А), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

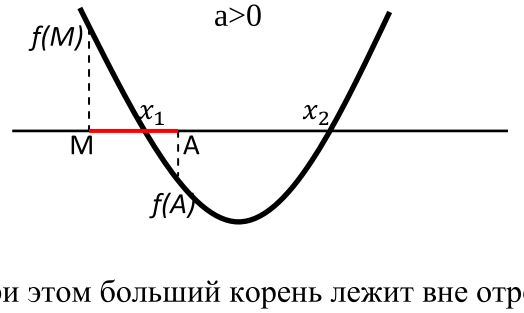


$$\begin{cases} f(M) < 0 \\ f(A) > 0 \end{cases}$$

при этом меньший корень вне отрезка |МА|

Следствие 3.

Чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между М и А (М < А), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

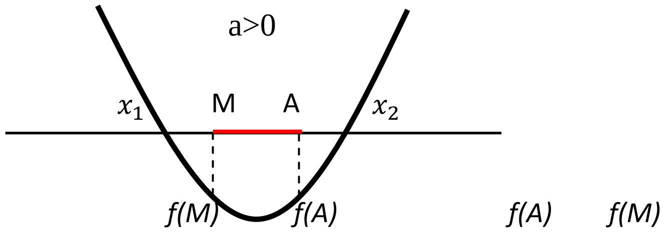


$$\begin{cases} f(M) > 0 \\ f(A) < 0 \end{cases}$$

при этом больший корень лежит вне отрезка |МА|

Следствие 4.

Чтобы один корень квадратного трехчлена был меньше, чем М, а другой больше, чем А (М < А), т.е. отрезок МА целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:



$$\begin{cases} f(M) < 0 \\ f(A) < 0 \end{cases}$$

Эта группа теорем и следствий очень часто применяется при решении задач с параметрами и поэтому имеет большое значение.

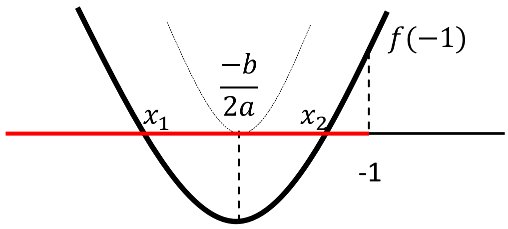
Акцентировать внимание учащихся на том, что здесь контрольными являются: направление ветвей параболы, знаки значений *f(M), f(A)*, расположение вершины параболы (а все остальное записывается по графической иллюстрации).

Применим данные теоремы и следствия к решению задач.

Задача №1. *При каких а оба корня уравнения* $x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$ *меньше -1?*

Решение. Данное уравнение квадратное. Изобразим графически условие задачи. Коэффициент перед x^2 положительный, ветви параболы $f(x) = x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2$

направлены вверх. Уравнение имеет два различных корня, которые меньше -1, т.е. оба корня расположены левее числа -1.



Т.к. корни существуют, то $D \geq 0$.
Абсцисса вершин параболы меньше -1 и значение квадратного трехчлена в точке -1 должно быть больше нуля.
Запишем систему, которая описывает эту ситуацию:

$$\begin{cases} D > 0, \\ -\frac{b}{2a} < -1, \\ f(-1) > 0; \end{cases}$$

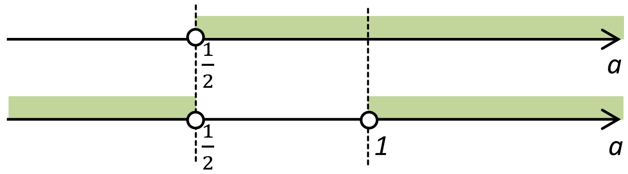
$$D_1 = (2a)^2 - (1 - 2a + 4a^2) = 4a^2 - 1 + 2a - 4a^2 = 2a - 1$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-4a}{2} = -2a$$

$$f(-1) = 1 - 4a + 1 - 2a + 4a^2 = 4a^2 - 6a + 2$$

Решим систему неравенств:

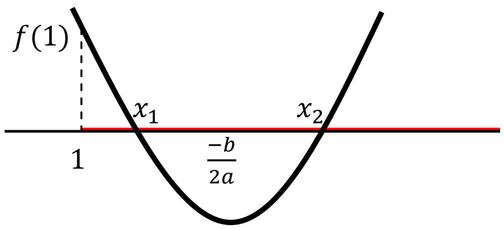
$$\begin{cases} 2a-1>0, \\ -2a<-1, \\ 4a^2-6a+2>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>\frac{1}{2}, \\ a>\frac{1}{2}, \\ 2a^2-3a+1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a>\frac{1}{2}, \\ 2(a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)>0; \end{cases}$$



Ответ: при $a > 1$.

Задача №2. При каких значениях a уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-2a+4=0$ имеет два различных корня, больших 1?

Решение. Данное уравнение квадратное. Изобразим графически условие задачи. Коэффициент при старшем члене больше нуля, ветви параболы направлены вверх. Уравнение имеет два различных корня, которые больше 1, т.е. оба корня расположены правее числа 1.



Запишем систему, которая описывает эту ситуацию. Чтобы уравнение имело два корня различных корня, дискриминант должен быть строго больше нуля. Абцисса вершины параболы больше 1 и значение квадратного трехчлена в точке 1 должно быть больше нуля.

Получаем: $$\begin{cases} D>0, \\ \frac{-b}{2a}>1, \\ f(1)>0; \end{cases}$$

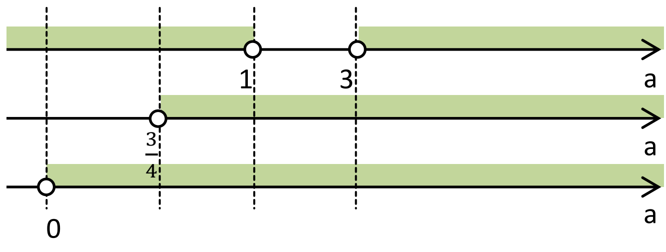
$$D_1=(a+1)^2-(a^2-2a+4)=a^2+2a+1-a^2+2a-4=4a-3$$

$$\frac{-b}{2a}=a+1$$

$$f(1)=1-2(a+1)+a^2-2a+4=1-2a-2+a^2-2a+4=a^2-4a+3$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4a-3>0, \\ a+1>1, \\ a^2-4a+3>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>\frac{3}{4}, \\ a>0, \\ \left[\begin{matrix} a<1, \\ a>3; \end{matrix}\right. \end{cases}$$



Ответ: при $a\in\left(\frac{3}{4};1\right)\cup(3;+\infty)$.

Задача №3. Найти множество значений параметра *a*, при которых число 3 находится между корнями квадратного уравнения $3ax^2 - 2(7a+3)x + 3a^2 + 30 = 0$.

Решение. Данное уравнение степени не выше второй.

1) Если 3*a*=0*, a*=0 уравнение принимает вид

$$-2 \cdot 3x + 30 = 0$$
$$-6x = -30$$
` $x = 5$`

При *a* = 0 уравнение будет иметь один корень.

2) Если $a \neq 0$, то данное уравнение является квадратным.

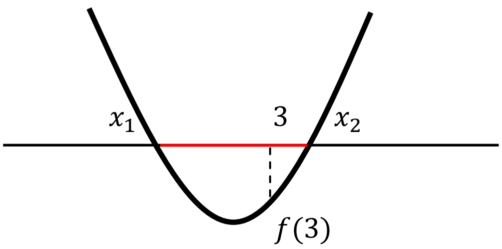
$$3ax^2 - 2(7a+3)x + 3a^2 + 30 = 0 \mid \div 3a \neq 0$$

Привидем уравнение к виду:

$$x^2 - \frac{2(7a+3)}{3a} \cdot x + \frac{3a^2+30}{3a} = 0$$
$$x^2 - \frac{2(7a+3)}{3a} \cdot x + \frac{a^2+10}{a} = 0$$

Изобразим графически условие задачи.

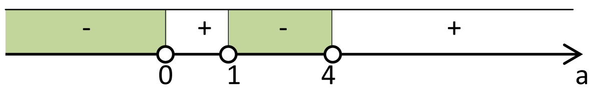
Коэффициент при старшем члене в полчившемся уравнении больше нуля, ветви параболы $f(x) = x^2 - \frac{2(7a+3)}{3a} \cdot x + \frac{a^2+10}{a}$ направлены вверх, и парабола должна пересекать ось абсцисс в двух точках. Число 3 находится между корнями квадратного уравнения.



(***Имеет место следующее утверждение:***
Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$
Еслит для некоторого числа t выполнено неравенство f(t)<0, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ *имеет два различных корня*).
Т.к. в условии прямо указано на существование двух различных корней, то <u>дискриминант должен быть положительным.</u>

Поэтому требование *f(3) <0* как необходимо, так и достаточно для того, чтобы выполнялось неравенство $x_1 < 3 < x_2$ (заметим, что здесь нет необходимости требовать еще выполнения неравенства *D* > 0).

$$f(3) = 9 - \frac{2(7a+3)}{3a} \cdot 3 + \frac{a^2+10}{a} = 9 - \frac{2(7a+3)}{a} + \frac{a^2+10}{a} =$$
$$= \frac{9a - 2(7a+3) + a^2 + 10}{a} = \frac{9a - 14a - 6 + a^2 + 10}{a} = \frac{a^2 - 5a + 4}{a} = \frac{(a-1)(a-4)}{a}$$
$$\frac{(a-1)(a-4)}{a} < 0$$

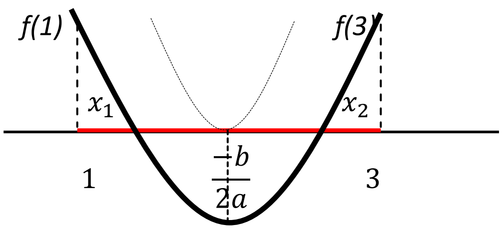


Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (1; 4)$.

Задача №4. При каких a корни уравнения $x^2+ax+4=0$ принадлежат интервалу (1;3)?

Решение. Данное уравнение квадратное. Коэффициент перед x^2 положительный, ветви параболы $f(x)=x^2+ax+4$ направлены вверх. Корни уравнения принадлежат интервалу (1;3).

Изобразим графически условие задачи.



Пусть корни x_1, x_2 лежат между 1 и 3. Т.к. корни существуют, то выполняется неравенство $D \geq 0$ (именно нестрогое, поскольку случай $x_1 = x_2$ не исключен).

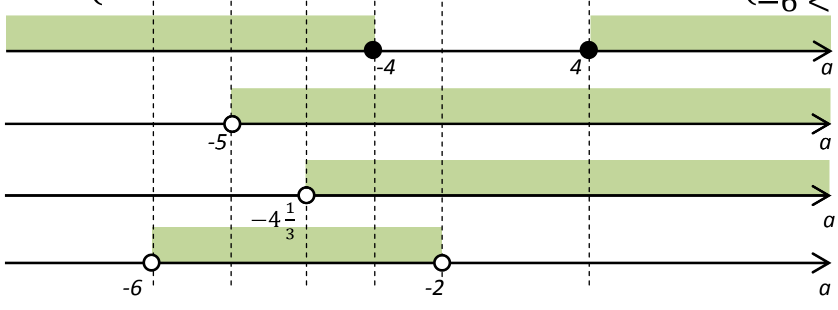
Квадратный трехчлен принимает положительные значения в точках 1 и 3. Абсцисса вершины параболы больше 1, но меньше 3. Запишем систему, которая описывает эту ситуацию:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(1) > 0, \\ f(3) > 0, \\ 1 < -\dfrac{b}{2a} < 3; \end{cases}$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 4 = a^2 - 16$$
$$f(1) = 1 + a + 4 = a + 5$$
$$f(3) = 9 + 3a + 4 = 3a + 13$$
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{a}{2}$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} a^2 - 16 \geq 0, \\ a + 5 > 0, \\ 3a + 13 > 0, \\ 1 < -\dfrac{a}{2} < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-4)(a+4) \geq 0, \\ a > -5, \\ a > -\dfrac{13}{3}, \\ 2 < -a < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leq -4, \\ a \geq 4, \end{array}\right. \\ a > -5, \\ a > -4\dfrac{1}{3}, \\ -6 < a < -2. \end{cases}$$



Ответ: $a \in \left(-4\frac{1}{3}; -4\right]$

Задача №5. При каких a корни уравнения $ax^2 + (4-2a)x + 1 = 0$ по модулю меньше 1?

Решение. Данное уравнение степени не выше второй.

1) При $a = 0$ получаем уравнение $4x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{4}$

$\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$, значит при $a = 0$ уравнение будет иметь корень по модулю меньше 1 (значение параметра $a = 0$ нам подходит).

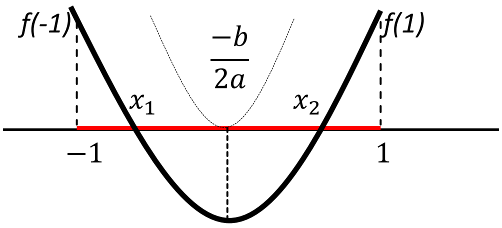
2) При $a \neq 0$ исходное уравнение является квадратным.

$$ax^2 + (4-2a)x + 1 = 0 \quad |: a \neq 0$$

Приведем уравнение к виду:

$$x^2 + \frac{2(2-a)}{a}x + \frac{1}{a} = 0$$

Изобразим графически условие задачи, $f(x) = x^2 + \frac{2(2-a)}{a}x + \frac{1}{a}$



Запишем систему, которая описывает данную ситуацию:

$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < -\dfrac{b}{2a} < 1. \end{cases}$$

$D_1 = (2-a)^2 - a = 4 - 4a + a^2 - a = a^2 - 5a + 4$

$$f(-1) = 1 - \frac{2(2-a)}{a} + \frac{1}{a} = \frac{a - 4 + 2a + 1}{a} = \frac{3a-3}{a}$$

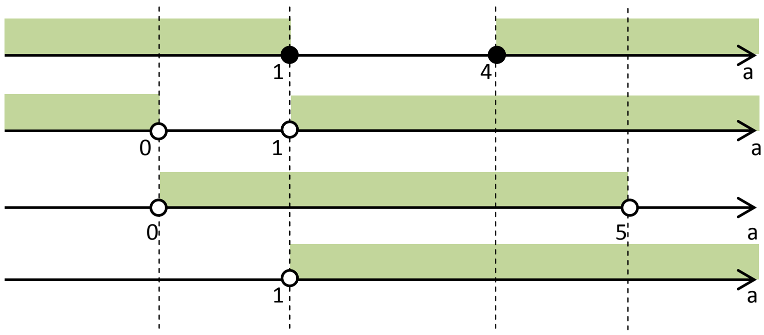
$$f(1) = 1 + \frac{4-2a}{a} + \frac{1}{a} = \frac{a + 4 - 2a + 1}{a} = \frac{-a+5}{a}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2(2-a)}{2a} = \frac{a-2}{a}$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} a^2-5a+4\ge 0,\\ \dfrac{3a-3}{a}>0,\\ \dfrac{5-a}{a}>0,\\ -1<\dfrac{a-2}{a}<1; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-1)(a-4)\ge 0,\\ \dfrac{a-1}{a}>0,\\ \dfrac{a-5}{a}<0,\\ \begin{cases} \dfrac{a-2}{a}<1,\\ \dfrac{a-2}{a}>-1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} (a-1)(a-4)\ge 0,\\ \dfrac{a-1}{a}>0,\\ \dfrac{a-5}{a}<0,\\ \begin{cases} \dfrac{a-2-a}{a}<0,\\ \dfrac{a-2+a}{a}>0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} (a-1)(a-4)\ge 0,\\ \dfrac{a-1}{a}>0,\\ \dfrac{a-5}{a}<0,\\ \begin{cases} \dfrac{2}{a}>0,\\ \dfrac{a-1}{a}>0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\le 1,\\ a\ge 4, \end{array}\right.\\ 0<a<5,\\ \left[\begin{array}{l} a<0,\\ a>1, \end{array}\right.\\ a>1. \end{cases}$$



Итак, $4\le a<5$.

Учитывая, что при $a=0$ уравнение имеет корень по модулю меньше 1, то в ответ надо добавить $a=0$.

Ответ: при $a\in\{0\}\cup[4;5)$.

Задача №6. При каких значениях a один из корней уравнения $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ меньше 2, а второй больше 3?

Решение. Данное уравнение степени не выше второй.

1) Если (a - 2) = 0, a = 2 уравнение принимает вид

$-10x+8=0$

$x=0{,}8$

При a = 2 уравнение будет иметь один корень.

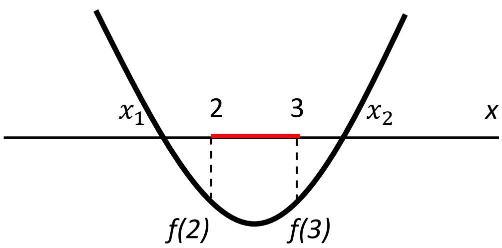
2) Если $a\ne 2$, то данное уравнение является квадратным

$$(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0 \quad |:a-2\ne 0$$

$$x^2-\frac{2(a+3)}{a-2}x+\frac{4a}{a-2}=0$$

Изобразим графически условие задачи.

Старший коэффициент больше нуля, ветви параболы $f(x)=x^2-\frac{2(a+3)}{a-2}x+\frac{4a}{a-2}$



направлены вверх. Корни уравнения лежат по разные стороны интервала (2; 3).

Запишем систему, которая описывает эту ситуацию:

$$\begin{cases} f(2) < 0, \\ f(3) < 0. \end{cases}$$

$$f(2) = 4 - \frac{4(a+3)}{a-2} + \frac{4a}{a-2} = \frac{4(a-2) - 4(a+3) + 4a}{a-2} = \frac{4a - 8 - 4a - 12 + 4a}{a-2} =$$

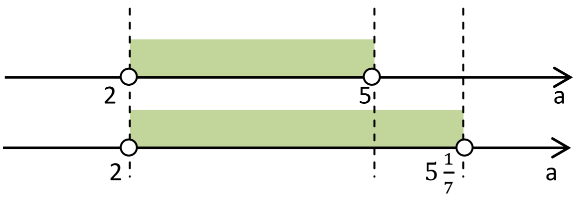
$$= \frac{4a-20}{a-2}$$

$$f(3) = 9 - \frac{6(a+3)}{a-2} + \frac{4a}{a-2} = \frac{9(a-2) - 6(a+3) + 4a}{a-2} = \frac{9a - 18 - 6a - 18 + 4a}{a-2} =$$

$$= \frac{7a-36}{a-2}$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{4a-20}{a-2} < 0, \\ \dfrac{7a-36}{a-2} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a-5}{a-2} < 0, \\ \dfrac{7a-36}{a-2} < 0. \end{cases}$$



Ответ: при $a \in (2; 5)$.

Решение различных уравнений с параметрами (иррациональное уравнение, тригонометрическое, показательное, логарифмическое).

Покажем необходимость знания условий расположения корней квадратного трехчлена при решении различных видов уравнений с параметром.

Иррациональное уравнение с параметром (П.И. Горнштейн, В.Б Полонский, М.С. Якир «Задачи с параметром», III.137(МАИ)).

Задача №1. Найти множества значений параметра а, для каждого из которых уравнение

$\sqrt{2(x^2 - x - 2a^2 + 2a + 2)} = x + 1$ имеет два корня разных знаков.

Решение. $\sqrt{2(x^2 - x - 2a^2 + 2a + 2)} = x + 1$

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2(x^2 - x - 2a^2 + 2a + 2 = x^2 + 2x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x^2 - 2x - 4a^2 + 4a + 4 - x^2 - 2x - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 - 4x - 4a^2 + 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

Значит, О.Д.З.: $x \geq -1, a \in R$

Т.к. исходное уравнение должно иметь два корня разных знаков, значит квадратное уравнение

$$x^2 - 4x - 4a^2 + 4a + 3 = 0, \text{\textit{при}}\ x \geq -1$$

должно иметь два корня разных знаков.

$$x^2 - 4x - 4a^2 + 4a + 3 = 0$$

$$D_1 = 4 - (-4a^2 + 4a + 3) = 4 + 4a^2 - 4a - 3 = 4a^2 - 4a + 1$$

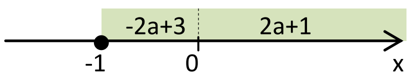
$$D_1 = (2a-1)^2 \qquad \text{(полный квадрат)}$$

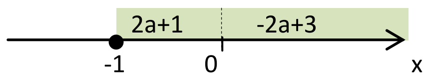
$$x_1 = 2 - (2a - 1) \qquad x_2 = 2 + 2a - 1$$

$$x_1 = 2 - 2a + 1 \qquad \underline{x_2 = 2a + 1}$$

$$x_1 = -2a + 3$$

Т.к. корни должны быть разных знаков, то они должны удовлетворять условиям:



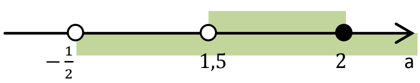


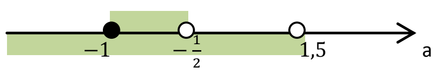
или

$$\begin{cases} -1 \leq -2a + 3 < 0 \\ 2a + 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq 2a + 1 < 0 \\ -2a + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leq -2a < -3 \\ 2a > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \leq 2a < -1 \\ -2a > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}5 < a \leq 2 \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq a < -\frac{1}{2} \\ a < 1{,}5 \end{cases}$$





$1{,}5 < a \leq 2$ $\qquad$ $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$

Ответ: при $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$; $1{,}5 < a \leq 2$.

Логарифмическое уравнение с параметром (П.И. Горнштейн, В.Б Полонский, М.С. Якир «Задачи с параметром»)

Задача №2. (III.150) Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(a-1)log_3^2(x-2)-2(a+1)log_3(x-2)+a-3=0$ меньше 3.

Решение. $(a-1)log_3^2(x-2)-2(a+1)log_3(x-2)+a-3=0$

*1)*Если *a-1=0, a=1*, то уравнение примет вид

$-4log_3(x-2)-2=0$

$-4log_3(x-2)=2$

$log_3(x-2)=-\frac{1}{2}$ *О.Д.З.:* $x-2>0,\ x>2$

$x-2=3^{-\frac{1}{2}}$

$x=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$

$2+\frac{1}{\sqrt{3}}<3$, *значит при* $a=1$ *уравнение будет иметь корень меньше* 3.

2) $a-1\neq 0, a\neq 1$ $(a-1)log_3^2(x-2)-2(a+1)log_3(x-2)+a-3=0$

При решении уравнений методом замены переменной необходимо правильно оценить значение новой переменной.

По условию задачи корень уравнения меньше 3, значит *x<3*

Оценим выражение $(x-2)$, то

x-2<1

$log_3(x-2)<log_3 1$

$log_3(x-2)<0$

Пусть $log_3(x-2)=t, t<0$

Значит, решение сводится к нахождению всех значений параметра

$a\neq 1$ уравнения $(a-1)t^2-2(a+1)t+a-3=0$, при которых корни уравнения удовлетворяют условию t<0

$$(a-1)t^2-2(a+1)t+a-3=0$$

$D_1=(a+1)^2-(a-1)(a-3)=a^2+2a+1-(a^2-4a+3)=$

$=a^2+2a+1-a^2+4a-3=6a-2$ (не является полным квадратом двучлена)

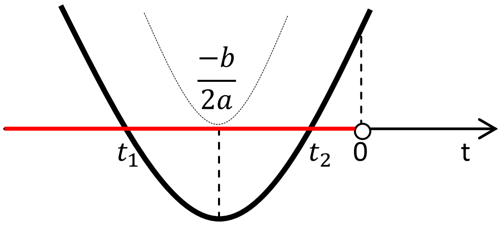
$(a-1)t^2-2a(a+1)t+(a-3)$*=0| : (a-1)*$\neq 0$

Приведем уравнение к виду

$t^2 - \frac{2(a+1)}{a-1}t + \frac{a-3}{a-1} = 0,\ a \neq 1$ удовлетворяющее условию $t<0$

Графически это можно изобразить так:

если $f(t) = t^2 - \frac{2(a+1)}{(a-1)}t + \frac{a-3}{a-1}$



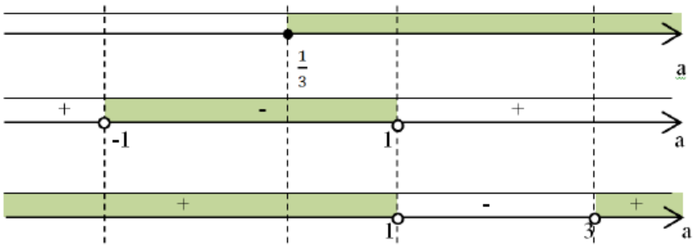
$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ x_0 < 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$$

$D_1 = 6a - 2$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2(a+1)}{(a-1)\cdot 2} = \frac{a+1}{a-1}$$

$$f\ (0) = \frac{a-3}{a-1}$$

$$\begin{cases} 6a - 2 \geq 0, \\ \frac{a+1}{a-1} < 0, \\ \frac{a-3}{a-1} > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geq \frac{1}{3}, \\ \frac{a+1}{a-1} < 0, \\ \frac{a-3}{a-1} > 0. \end{cases}$$



$$\frac{1}{3} \leq a < 1$$

Учитывая, что при a=1 уравнение будет иметь корень меньше 3, то $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$

Ответ: при $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$

Тригонометрическое уравнение с параметром.

Задача №3. При каких значениях параметра *a* уравнение $cos^2 x - (a-2)\cos x + 4a + 1 = 0$ не имеет корней?

Решение.

О.Д.З.: $x \in R, a \in R$

Пусть cos$x$ = t, $-1 \le t \le 1$

Получим $t^2 - (a-2)t + 4a + 1 = 0$ - это квадратное уравнение.

$$D = (a-2)^2 - 4(4a+1) = a^2 - 4a + 4 - 16a - 4 = a^2 - 20a$$

1) Квадратное уравнение не имеет корней, если D < 0

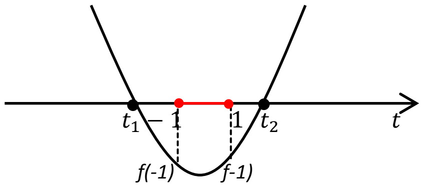
$$a^2 - 20a < 0$$
$$a(a-20) < 0$$

при $a \in (0; 20)$

Либо корни есть, но они не удовлетворяют условию $-1 \le t \le 1$

2) *При D>0 уравнение имеет корни, но они не удовлетворяют условию* $-1 \le t \le 1$. *Возможны случаи:*

а)

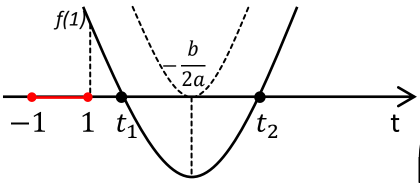


$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + a - 2 + 4a + 1 < 0, \\ 1 - (a-2) + 4a + 1 < 0; \end{cases} \begin{cases} 5a < 0, \\ 3a < -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0, \\ a < -\frac{4}{3}. \end{cases} \rightarrow \quad a < -\frac{4}{3}$$

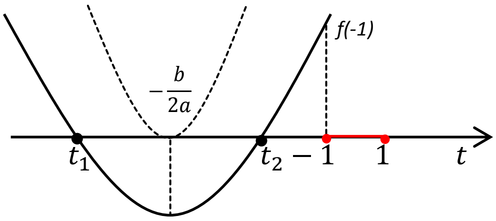
б)



$$\begin{cases} D \ge 0, \\ -\frac{b}{2a} > 1, \\ f(1) > 0; \end{cases} \begin{cases} a(a-20) \ge 0, \\ \frac{a-2}{2} > 1, \\ f(1) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 20, \end{array}\right. \\ \frac{a-2}{2} > 1, \\ 1 - (a-2) + 4a + 1 > 0; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 20, \end{array}\right. \\ a > 4, \\ a > -\frac{4}{3}. \end{cases} \rightarrow \quad a \ge 20$$

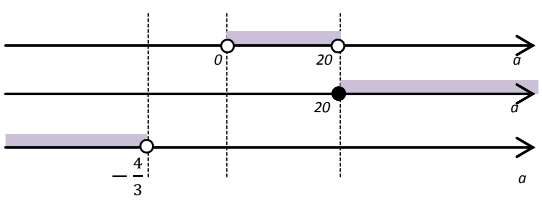
в)



$$\begin{cases} D \ge 0, \\ -\frac{b}{2a} < -1, \\ f(-1) > 0; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 20 \end{array}\right. \\ \frac{a-2}{2} < -1 \\ 1 + (a-2) + 4a + 1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le 0 \\ a \ge 20 \end{array}\right. \\ a < 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Объединим найденные решения, получим



Ответ: при $a < -\frac{4}{3}; a > 0$ уравнение не имеет корней.

Показательное уравнение с параметром.

Задача №4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$9^{-|x-2|} + 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ имеет ровно два различных действительных корня.

Решение. О.Д.З.: $a \in R; x \in R$

При решении уравнений с параметром заменой переменной нужно правильно оценить значения переменной.

Пусть $3^{-|x-2|} = t,$

Т.к. $|x\text{-}2|>0$

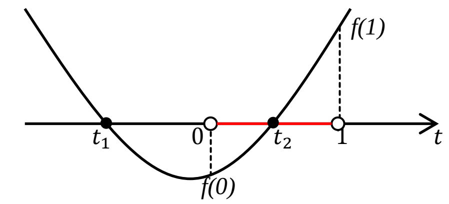
$-|x\text{-}2|<0$

$0 < 3^{-|x-2|} < 3^0$

$0 < 3^{-|x-2|} < 1,$ то $0<t<1$

По условию исходное уравнение должно иметь ровно два различных действительных корня, значит квадратное уравнение $t^2 - 4t - a = 0$

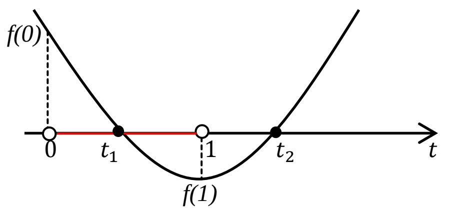
1) должно иметь только один корень, удовлетворяющий условию 0< t < 1
   Один корень, если D = 0, при 0 <t < 1
   $$D_1 = 4 + a, \qquad a + 4 = 0, \qquad a = -4$$
   если $a = -4$, то $t^2 - 4t + 4 = 0$
   $$(t-2)^2 = 0$$
   t = 2
   Но t = 2 не удовлетворяет условию 0 < t < 1, значит значение параметра a = - 4 не удовлетворяет условию задачи.
2) Уравнение $t^2 - 4t - a = 0$, 0 < t < 1 должно иметь один корень, удовлетворяющий условию 0 < t < 1, другой не удовлетворяет этому условию.
   Изобразим расположение корней.



$\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(0) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 1 - 4 - a > 0, \\ -a < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a < -3, \\ a > 0. \end{cases}$ решений нет.



$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -a > 0, \\ 1 - 4 - a < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a < 0, \\ a > -3. \end{cases}$ Значит, $-3<a<0$

Ответ: при $-3 < a < 0$ уравнение имеет ровно два различных корня.

Графический метод решения уравнений с параметром.

Графиком функции $y = f(x), x \in D(f)$ называется множество всех точек координатной плоскости вида Oxy вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Рассмотрим приемы и методы решений задач с параметрами с использованием ***метода наглядной графической интерпретации***. В зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче, можно выделить два основных графических приема: первый – построение графического образа на координатной плоскости Oxy, второй – на координатной плоскости Oxa.

Первый прием заключается в следующем. Исходное уравнение преобразуется к виду $g(x) = f(x,a)$. На плоскости Oxy строится график функции $y = g(x)$. Функция $y = f(x,a)$ задает определенное семейство кривых, зависящих от параметра a. Кривые этого семейства получаются из кривой $y = f(x)$ с помощью некоторого элементарного преобразования (параллельного переноса вдоль осей, растяжения, наложения модуля или в случае линейной зависимости между x и у – поворота относительно некоторой точки). Построив графический образ уравнения $g(x) = f(x,a)$ можно установить, сколько точек пересечения имеют графики функций $y = g(x)$ и $y = f(x,a)$, – это определяет количество корней уравнения $g(x) = f(x,a)$, а, следовательно, и исходного уравнения в зависимости от значения параметра.

Лучше всего приведенный метод работает в тех случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве корней в зависимости от значений параметра или определения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

Эти типы задач отличает то, что при их решении не требуется получить явное решение, а нужно лишь найти те значения параметра, при которых это решение удовлетворяет тем или иным условиям. Примерами таких условий для решения могут служить следующие:

- существует решение;
- не существуют решения;
- существует единственное решение;
- существует положительное решение;
- существует ровно k решений;
- существует решение, принадлежащее указанному промежутку.

В этих случаях очень полезен графический способ решения задач с параметрами.

Графическое представление уравнения с параметром обладает несколькими несомненными преимуществами: во-первых, построив график (графики), можно определить, как влияет на них и, соответственно, на решение уравнения изменение параметра; во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи.

Для овладения графическими методами решения задач с параметрами напомним основные способы построения семейства графиков функций $f(x,a)$. Будем рассматривать функции, графики которых можно построить средствами элементарной математики. Считаем, что график функции $y = f(x)$ известен.

График функции $y = Af(ax+b)+B$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ следующими геометрическими преобразованиями:

1. а) осевой симметрии относительно оси Ox (точка $(x;y)$ переходит в точку $(x;-y)$);
   б) осевой симметрии относительно оси Oy (точка $(x;y)$ переходит в точку $(-x;y)$);

в) центральной симметрии относительно начала координат – точки *O* (точка (x;y) переходит в точку *(-x;-y));*

2. а) параллельного переноса (сдвига) вдоль оси *Ox* (точка (*x;y*) переходит в точку *(x+a;y*), где *a* – некоторое число, при этом перенос происходит вправо, если *a>0,* и влево, если a<0);

   б) параллельного переноса (сдвига) вдоль оси *Oy* (точка (*x;y*) переходит в точку *(x;y+b),* где *b* – некоторое число, при этом перенос происходит вверх, если b>0, и вниз, если *b<0);*

3. а) растяжения (или сжатия) вдоль оси *Ox* (при растяжении (сжатии) в *p* раз ($p>0;\ p\neq 1$) вдоль оси *Ox* точка (*x; y)* переходит в точку (*px; y*));

   б) растяжения (или сжатия) вдоль оси *Oy* (при растяжении (сжатии) в *q* раз ($q>0,\ q\neq 1$) вдоль оси *Oy* точка *(x; y)* переходит в точку (*x; qy*)).

Таблица
элементарных преобразований графика функции $y = f(x)$.

Функция	***Преобразование графика функции y=f(x)***
$y = f(x)+A$	Параллельный перенос его вдоль оси *Oy* на *A* единиц вверх при $A > 0$ и на $\vert A\vert$ единиц вниз при A < 0.
$y = f(x-a)$	Параллельный перенос его вдоль оси OX на *a* единиц вправо при a > 0 и на $\vert a\vert$ единиц влево при $a < 0$.
$y = kf(x), k > 0$	Растяжение его вдоль оси *Oy* в *k* раз, если $k > 1$, и сжатие в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
$y = f(kx),\ k > 0$	Сжатие его вдоль оси *Ox* в k раз, если k > 1,и растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
$y = - f(x)$	Симметричное отражение его относительно оси *Ox*.
$y = \vert f(x)\vert$	Часть графика, расположенная ниже оси *Ox* , симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть останется без изменения.
$y = f(-x)$	Симметричное отражение его относительно оси *Oy*.
$y = f(\vert x\vert)$	Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x < 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси *Oy* части графика для $x > 0$.

Рассмотрим применение графического метода при решении задач с параметром, встречающихся на ОГЭ по математике. Разберем задачи, решаемые графическим способом, строя графики на плоскости *Oxy*.

Задача №1. *Сколько корней имеет уравнение* $\vert x^2-2x-3\vert = a$ *в зависимости от значения параметра a?*

Решение.

Решим графически. В системе координат (x; y) построим графики функций y = $|x^2\text{-}2x\text{-}3|$ и y = *a*.

График функций y = $|x^2\text{-}2x\text{-}3|$ строим с помощью элементарных преобразований.

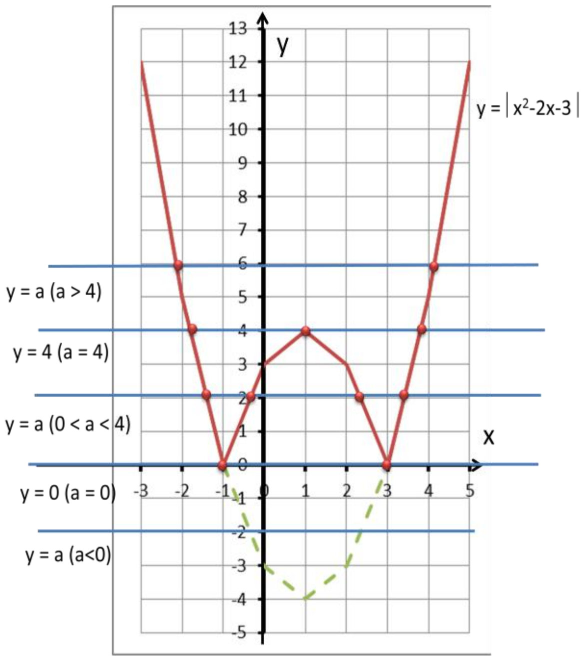
1) Сначала построим график функции y = x^2 - 2x-3 = (x^2-2x+1)-1-3 = $(x\text{-}1)^2$ -4

   y = $(x\text{-}1)^2$ - 4 –уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, так как *a*=1>0

   (1;-4) – вершина параболы

2) Для того чтобы построить график функции y = $|x^2\text{-}2x\text{-}3|$, необходимо точки, лежащие на оси Ox и часть графика, находящуюся выше оси Ox, оставить без изменения, а часть графика находящуюся ниже оси Ox, симметрично отобразить в верхнюю полуплоскость.

Графиком функции y = *a* является прямая, параллельная оси Ox или с ней совпадающая (при *a* = 0).



Из графика видно:

Если *a* = 0, то прямая y = *a* совпадает с осью Ox и имеет с графиком функции y = $|x^2\text{-}2x\text{-}3|$ две общие точки, а также прямая y = *a* будет иметь с графиком функции y = $|x^2\text{-}2x\text{-}3|$ две общие точки при *a* > 4. Значит, при *a* = 0 и *a* > 4 исходное уравнение имеет два корня.
Если 0 < *a* < 4, то прямая y = *a* имеет с графиком функции y = $|x^2\text{-}2x\text{-}3|$ четыре общие точки. Значит, при 0 < *a* < 4, исходное уравнение имеет четыре корня.
Если *a* = 4, то прямая y = *a* пересекает график функции в трех точках; следовательно, уравнение имеет три корня.
Если *a* < 0, уравнение корней не имеет, так как прямая y = *a* не пересекает график функции y = $|x^2\text{-}2x\text{-}3|$.

Ответ:

1) если $a \in (-\infty;0)$, то корней нет;

2) если $a=0$, $a \in (4;+\infty)$, то два корня;

3) если $a=4$, то три корня;

4) если $a \in (0;4)$, то четыре корня.

Задача 2. *Сколько корней имеет уравнение* $\frac{x+1}{|x|-1} = |x| + a$ *в зависимости от параметра* a*?*

Решение. О.Д.З.: $|x| \neq 1,\ x \neq \pm 1$

Построим в системе координат (х; у) графики функций $y = \frac{x+1}{|x|-1}$ и $y = |x| + a$.

1) $y = \frac{x+1}{|x|-1}$

Раскроем знак модуля по определению, получим

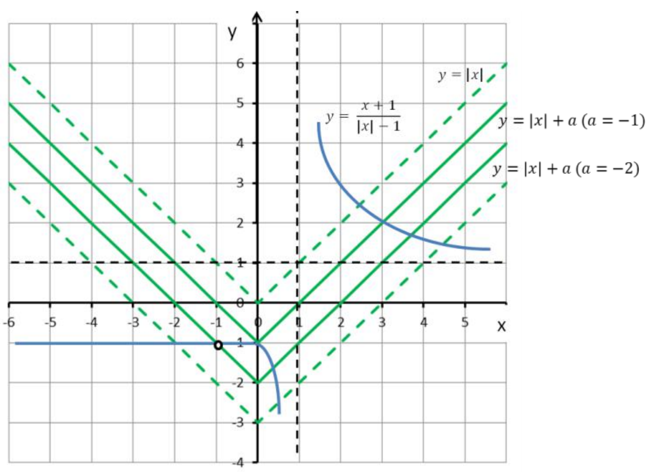
$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x-1}, \text{если } x < 0, x \neq -1, \\ \dfrac{x+1}{x-1}, \text{если } x \geq 0, x \neq 1; \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-(x+1)}, \text{если } x < 0, x \neq -1, \\ \dfrac{(x-1)+2}{x-1}, \text{если } x \geq 0, x \neq 1; \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, \text{если } x < 0, x \neq -1, \\ \dfrac{2}{x-1} + 1, \text{если } x \geq 0, x \neq 1. \end{cases}$$

Прямые х = 1, у = 1 являются асимптотами графика функции.

2) График функции у = | х | + a получается из графика функции у = | х | параллельным переносом на a единиц вдоль оси Оу.



Графики функций $y = \frac{x+1}{|x|-1}$ и $y = |x| + a$ пересекаются в одной точке при $a > -1$; значит, уравнение $\frac{x+1}{|x|-1} = |x| + a$ при этих значениях параметра имеет одно решение.

При $a = -1$, $a = -2$ графики пересекаются в двух точках; значит, при этих значениях параметра уравнение имеет два корня.
При $-2 < a < -1$, $a < -2$ графики пересекаются в трех точках; значит, уравнение при этих значениях параметра имеет три решения.

При решении уравнения особо следует обратить внимание на случай, когда $a = -2$, *так как точка (– 1; – 1) не принадлежит графику функции* $y = \frac{x+1}{|x|-1}$, *но принадлежит графику функции y = | x | +* a.

Ответ: если $a > -1$, то одно решение;
если $a = -1$, $a = -2$, то два решения;
если $-2 < a < -1$, $a < -2$, то три решения.

Задача №3. *Найти все значения параметра k при каждом из которых уравнение* $|x-3| = kx + 2$ *имеет два решения.*

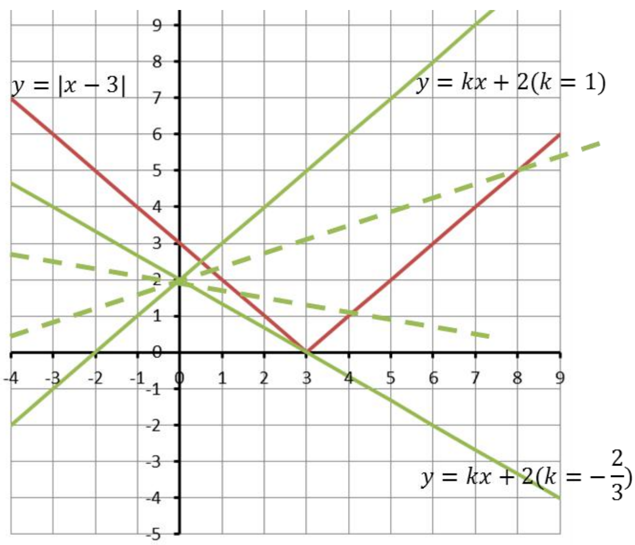
Решение. О.Д.З.: $x \in R, k \in R$

В системе координат (x; y) построим графики функций $y = |x-3|$ и $y = kx + 2$.

1) График функции $y = |x-3|$ получается из графика функции $y = |x|$ путем параллельного переноса вдоль оси О*x* на три единицы вправо, имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{если } x < 3, \\ x-3, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

2) График функции $y = kx + 2$ получается из графика функции $y = kx$ путем параллельного переноса вдоль оси Оy на две единицы вверх. Графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.



Из графика видно:

Прямая $у = kx + 2$ пересекает график функции $y = |x - 3|$ в двух точках, если ее угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку (3;0) и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямой $y = x - 3$. Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точку (3;0):

$$3k + 2 = 0$$

$$\boldsymbol{k = -\frac{2}{3}}$$

Углового коэффициента прямой, параллельной прямой $y = x - 3$, равен 1.

Если $-\frac{2}{3} < k < 1$, то прямая $у = kx + 2$ пересекает график функции $y = |x - 3|$ в двух точках. Значит, при $-\frac{2}{3} < k < 1$ уравнение $|x - 3| = kx + 2$ имеет два решения.

Ответ: при $-\frac{2}{3} < k < 1$

Задачи для самостоятельного решения.

1) При каких a уравнение $\big||2x| - 1\big| = x - a$ имеет ровно три решения?

Ответ: при $a = -1$ или $a = -\frac{1}{2}$

2) Найти число решений уравнения $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$.
3) Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 4|x| - 1| = a$ в зависимости от параметра a?

Использование четности функции при решении задач с параметром.

Четные и нечетные функции

Множество точек *X* числовой оси называется ***симметричным*** относительно начала координат (точки О), если для любого числа $x \in X$ число (-*x*) также принадлежит множеству *X*.

Функция *y = f(x)*, заданная на множестве X, называется ***четной***, если выполнены следующие условия:

1) множество X симметрично относительно начала координат;
2) для любого $x \in X$ справедливо равенство *f(-x)= f(x)*

Функция *y = f(x),* заданная на множестве X, называется ***нечетной***, если выполнены следующие условия:

1) множество X симметрично относительно начала координат;
2) для любого $x \in X$ справедливо равенство *f(-x) = -f(x)*

График четной функции симметричен относительно оси *Oy*, нечетной – симметричен относительно начала координат.

Использование четности функций, входящих в уравнение с параметрами, позволяет рационально решать определенный класс задач. Чаще всего это задачи на нахождение количества решений. К этой группе задач можно отнести такие, в которых требуется установить значения параметра, при которых уравнение имеет «*единственное решение*», «*четное число решений*» или «*нечетное число решений*». Практически всегда подобные задачи имеют характерную особенность: их условия не изменяются либо при замене знака одной или нескольких переменных на противоположный («симметрия» относительно знака), либо при перестановке нескольких переменных («симметрия» относительно перестановки переменных).

При решении задач такого рода используется следующий порядок действий:

1. Проверяем, является ли функция $f(x)$ четной:
   - область определения функции $f(x)$ должна быть симметрична относительно нуля;
   - должно выполняться равенство $f(-x)=f(x)$.
2. *a*) Если функция f(x) является четной, то делаем вывод: если $\boldsymbol{x_0}$ является корнем исходного уравнения, то $-\boldsymbol{x_0}$ является его корнем, уравнение имеет четное число корней.

   b) Уравнение будет иметь нечетное число корней, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Находим, при каких значениях параметра $x=0$ является корнем уравнения $f(x) = 0$. Для этого подставляем в уравнение $x = 0$ и решаем полученное уравнение относительно параметра. Находим соответствующие значения параметра.
3. Подставляем в исходное уравнение последовательно найденные значения параметра и выясняем, какое нечетное количество корней имеет данное уравнение.
4. В ответ записываем те значения параметра, при которых уравнение имеет требуемое число решений.

Задача №1.*При каком значении а уравнение* $x^{10} - a|x| + a^2 - a = 0$ *имеет единственное решение?*

Решение.

$$x^{10} - a|x| + a^2 - a = 0$$

1) О.Д.З.: $x \in R, a \in R$

2) Проверим, является ли функция $f(x) = x^{10} - a|x| + a^2 - a$ четной.

Область определения функции симметрична относительно начала координат.

Найдем значение функции в точке $-x$:

$f(-x) = (-x)^{10} - a|-x| + a^2 - a = x^{10} - a|x| + a^2 - a = f(x)$, т.к.

$$(-x)^{10} = x^{10}, \text{а } |-x| = |x|.$$

Т.к. $f(-x) = f(x)$, то $f(x) = x^{10} - a|x| + a^2 - a$ – четная.

Следовательно, если xявляется корнем уравнения $x^{10} - a|x| + a^2 - a = 0$, то $-x$ также будет являться корнем уравнения, то есть уравнение будет иметь четное число корней.

Уравнение будет иметь нечетное число корней, а именно единственное решение, если один из корней уравнения будет равен нулю.

3) Выясним, при каких значениях параметра a $x = 0$ является корнем.
Подставим в исходное уравнение $x = 0$ и решим полученное уравнение относительно параметра a:

$$a^2 - a = 0$$
$$a(a-1) = 0$$
$$a = 0 \text{ или } a = 1$$

Итак, мы получили два значения параметра, при которых один из корней исходного уравнения равен нулю. Найдем, при каком значении параметра этот корень единственный.
4) Подставляем в исходное уравнение последовательно найденные значения.
а) Если $\underline{a = 0}$, то

$$x^{10} = 0$$
$$x = 0$$

При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень.
б) Если $\underline{a = 1}$, то

$$x^{10} - |x| = 0$$
$$|x|^{10} - |x| = 0, |x| = t, t \geq 0$$
$$t^{10} - t = 0$$
$$t(t^9 - 1) = 0$$
$$t = 0 \quad t = 1$$
$$|x| = 0 \quad \text{или} \quad |x| = 1$$
$$x = 0 \qquad x = \pm 1$$

При $a = 1$ уравнение имеет три корня, что нам не подходит.
Ответ: при $a = 0$.

Задача №2. *Найти значения параметра а, при которых уравнение*

$$(|x| - 4)^2 + a\big||x| - 4\big| + 4 = 0$$

имеет ровно 7 действительных корней, и найти эти корни.
Решение.
1) О.Д.З.: $x \in R; a \in R$.
2) Проверим, является ли функция $f(x) = (|x| - 4)^2 + a\big||x| - 4\big| + 4$ четной.
Область определения функции симметрична относительно начала координат.
Найдем значение функции в точке –х:
$f(-x) = (|-x| - 4)^2 + a\big||-x| - 4\big| + 4 = (|x| - 4)^2 + a\big||x| - 4\big| + 4 = f(x)$, т.к. $|-x|=|x|$
Т.к. $f(-x) = f(x)$, то $f(x) = (|x| - 4)^2 + a\big||x| - 4\big| + 4$ – четная.
Следовательно, уравнение будет иметь нечетное число корней, если один из корней уравнения будет равен нулю.
3) Выясним, при каких значения параметра a, $x = 0$ является корнем.
Подставим в уравнение $x = 0$ и решим полученное уравнение относительно параметра a:

$$|-4|^2 + a|-4| + 4 = 0$$
$$4a + 20 = 0$$
$$4a = -20$$
$$a = -5$$

Итак, мы получим одно значение параметра a, при котором один из корней уравнения будет равен нулю.

4) Проверим, что условие a = -5 является достаточным для данной задачи. Подставим это значение a в исходное уравнение, получим:

$$(|x|-4)^2+5\left||x|-4\right|+4=0$$

Пусть $|x|-4=t$, тогда

$$t^2-5|t|+4=0$$
$$|t|^2-5|t|+4=0, \text{т. к. } t^2=|t|^2$$
$$|t|=y, y\geq 0$$
$$y^2-5y+4=0$$
$$y_1=1;\ y_2=4$$
$$|t|=1 \quad \text{или} \quad |t|=4$$
$$t=\pm 1 \qquad\qquad t=\pm 1$$

Вернемся к исходной замене переменной и решим четыре соответствующих уравнения

$$|x|-4=-1 \quad \text{или} \quad |x|-4=1 \quad \text{или} \quad |x|-4=-4 \quad \text{или} \quad |x|-4=4$$
$$|x|=3 \qquad\qquad |x|=5 \qquad\qquad |x|=0 \qquad\qquad |x|=8$$
$$x=\pm 3 \qquad\qquad x=\pm 5 \qquad\qquad x=0 \qquad\qquad x=\pm 8$$

Ответ: при $a=-5; x\,\epsilon\,\{-8;-5;-3;0;3;5;8\}$.

Задача №3. *Найти все значения а, при каждом из которых уравнение* $x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$ *имеет единственный корень.*

Решение.

1) О.Д.З.: $x\in R, a\in R$

2) Перенесем все слагаемые влево:

$$x^2+(2-a)^2-|x-2+a|-|x-a+2|=0$$

3) Проверим, является ли функция

$f(x)=x^2+(2-a)^2-|x-2+a|-|x-a+2|$ четной.

Область определения функции симметрична относительно начала координат.

Найдем значение функции в точке– x:

$f(-x)=(-x)^2+(2-a)^2-|-x-2+a|-|-x-a+2|=$

$$=x^2+(2-a)^2-|x-2+a|--|x-a+2|=f(x)$$

Т.к. $f(-x)=f(x)$, то $f(x)=x^2+(2-a)^2-|x-2+a|-|x-a+2|$ является четной. Следовательно, единственным решением уравнения будет число $x=0$.

4) Выясним, при каких значениях параметра a $x=0$ является корнем.

Подставим в исходное уравнение $x=0$ и решим полученное уравнение относительно параметра a:

$$(2-a)^2-|a-2|-|-a+2|=0$$
$$(2-a)^2-|a-2|-|a-2|=0$$
$$(a-2)^2-2|a-2|=0$$
$$\boldsymbol{|a-2|=t, \qquad t\geq 0}$$
$$t^2-2t=0$$
$$t(t-2)=0$$
$$t=0 \ \ \text{или} t=2$$
$$|a-2|=0 \quad \text{или} \quad |a-2|=2$$

$$a-2=0 \qquad \left[\begin{array}{l} a-2=2, \\ a-2=-2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a=4, \\ a=0. \end{array}\right.$$

$$a=2$$

Итак, мы получили три значения параметра, при которых один из корней исходного уравнения равен нулю. Найдем, при каком значении параметра этот корень единственный.

5) Подставляем в исходное уравнение последовательно найденные значения.

Рассмотрим три случая:

1. Если $\underline{a=2,}$ то получаем уравнение

$$x^2-|x|-|x|=0$$

$$|x|^2-2|x|=0$$

$$|x|=t, \ \ t\geq 0$$

$$t^2-2t=0$$

$$t(t-2)=0$$

$$t=0 \ \text{ или } \ t=2$$

$$|x|=0 \qquad |x|=2$$

$$x=0 \qquad x=\pm 2$$

При $a=2$ уравнение имеет три корня, не подходит.

2. Если $\underline{a=0}$, то $\quad x^2+4-|x-2|-|x+2|=0$

	$x<-2$	$-2\leq x<2$	$x\geq 2$
	-2	2	x
$x-2$	-	-	+
$x+2$	-	+	+

1) $x<-2, \qquad x^2+4+x-2+x+2=0$

$x^2+2x+4=0, D<0$ корней нет.

2) $-2\leq x\leq 2, \ x^2+4+x-2-x-2=0$

$x^2=0$

$\underline{x=0}$

3) $x\geq 2, \qquad x^2+4-x+2-x-2=0$

$x^2-2x+4=0, D<0$ корней нет.

При $a=0$ уравнение имеет один корень.

3. Если $\underline{a=4}$, то $x^2+4-|x-2|-|x+2|=0$

Получаем такое же уравнение, как и во втором случаи.

При $a=4$ уравнение имеет один корень.

Ответ: при $a=0$, $a=4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян Д.Ф. Математика. 10 – 11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами: элективный курс / авт.-сост. Д.Ф. Айвазян. – Волгоград: Учитель, 2009.
2. Амелькин В.В. Задачи с параметрами [Текст] / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – М.: Асар, 1996.
3. Башмаков М.И., Братусь Т.А. и др. Алгебра и начала анализа 10-11. Дидактические материалы. М.: Дрофа, 2003.
4. Беляев С.А. Задачи с параметрами: методическая разработка для учащихся Заочной школы «Юный математик» при ВЗМШ и МЦНМО. – М.: МЦНМО, 2009.
5. Васильева В. Уравнения и системы уравнений с параметром: применение понятия «пучок прямых на плоскости» [Текст] / В. Васильева, С. Забелина // Математика. – 2002. №4. - с. 20-22.
6. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005.
7. Дорофеев В.Ю. Пособие по математике для поступающих в СПбГУЭФ. – СПб: Изд-во СПбГУЭФ, 2003.
8. Дорофеев Г.В. Решение задач, содержащих параметры. Ч. 2 [Текст] / Г. В. Дорофеев, В. В. Затакавай. – М.: Перспектива, 1990.-с. 2-38.
9. Дубич С. Линейные и квадратные уравнения с параметрами [Текст]: 9 класс / С. Дубич // Математика. – 2001. №36. -с. 28-31.
10. Егерман Е. Задачи с параметрами. 7-11 классы [Текст] / Е. Егерман // Математика. – 2003. №1 -с. 18-20.
11. Егерман Е. Задачи с параметрами. 7-11 классы [Текст] / Е. Егерман // Математика. – 2003. №2. -с. 10-14.
12. Карасев В. Решение задач с параметрами [Текст] / В. Ка-расев, Г. Левшина, И. Данченков // Математика. – 2005. №4. -с. 38-44.
13. Косякова Т. Решение квадратных и дробно-рациональных уравнений, содержащих параметры [Текст] / Т. Косякова // Математика. – 2002. №22. -с. 15-18.
14. Косякова Т. Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений, содержащих параметры [Текст] / Т. Косякова // Математика. – 2001. №38. -с. 5-9.
15. Крамор В. С. Примеры с параметрами и их решение [Текст]: пособие для поступающих в вузы / В.С. Крамор. - М.: АРКТИ, 2000.-с. 48.
16. Креславская О. Задачи с параметром в итоговом повторении [Текст] / О. Креславская // Математика. – 2004. №18. -с. 23-27.
17. Креславская О. Задачи с параметром в итоговом повторении [Текст] / О. Креславская // Математика. – 2004. №19. -с,23-27
18. Кривчикова Э. Тема «Уравнения и системы уравнений» в курсе алгебры 11 класса [Текст] / Э. Кривчикова // Математика. – 2004. №37.-с. 18-37.
19. Легошина С. Решение неравенств первой и второй степени с параметрами [Текст] / С. Легошина // Математика. – 2000. №6.-с. 15-17.
20. Малинин В. Уравнение с параметрами [Текст]: графический метод решения // Математика. – 2003. №29. -с. 12-15.
21. Мордкович А.Г. Решаем уравнения. – М.: Школа-Пресс, 1995.
22. Муравин Г.К. Уравнения, неравенства и их системы [Текст]: фрагмент учебника Г.К. Муравина О.В., Муравиной Г.К. // Математика. – 2003. №4. -с. 21-27.
23. Окунев А.А. Графическое решение уравнений с параметрами [Текст] / А. А. Окунев. – М.: Школа-Пресс, 1986.

24. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник. – М.: Изд-во Факториал, 1997.
25. Письменский Д. Т. Математика для старшеклассников [Текст] / Д. Т. Письменский. – М.: Айрис, 1996.
26. Сканави М.И. Полный сборник задач для поступающих в ВУЗы. Группа повышенной сложности / Под редакцией М.И. Сканави. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2006. – 624 с.: ил.
27. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. Том 1 [Текст] / В. В. Ткачук. - М.: МЦНМО ТЕИС, 1996.-415 с.
28. Цыганов Ш. Десять правил расположения корней квадратного трехчлена [Текст] / Ш. Цыганов // Математика. – 2002. №18.-с. 19-23.
29. Цыганов Ш. Квадратные трехчлены и параметры [Текст] / Ш. Цыганов // Математика. – 1999. №5. -с. 4-9.
30. Шабунин М.И., Уравнения и системы уравнений с параметрами / Математика в школе. – 2003. №7. -с. 10-14.
31. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач [Текст]: учебное пособие для 10 класса средней школы / И. Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.
32. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами в ЕГЭ. – СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004.